ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 13, No. 2, 91-100, Januari 2017

Metode Elemen Batas pada Persamaan Integral Batas

Nasrah Sirajang dan Muhdaniar Darwis*

Abstrak

Metode Elemen Batas (MEB) atau disebut juga *Boundary Element Method* adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan berbagai macam permasalahan dalam ilmu pengetahuan dengan persamaan pengatur berupa persamaan diferensial parsial eliptik. Dalam tulisan ini akan ditunjukkankan pembentukan MEB menuju solusi numerik dari masalah nilai batas eliptik pada persamaan Laplace dua dimensi (2D) dengan media anisotropik. Dari hasil numerik yang diperoleh dapat disimpulkan bahwa MEB bekerja dengan baik untuk menyelesaikan permasalahan ini.

Kata kunci: MEB, domain, persamaan pengatur, syarat batas, integral batas.

1. Pendahuluan

Persamaan Laplace dua dimensi ($\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$) terdapat pada rumusan masalah yang berbeda-beda dari studi engineering dan ilmu-ilmu eksakta seperti thermostatics, elastostatics, magnetostatics, dan aliran fluida ideal. Masalah batas interior pada daerah R(2D) terbatas oleh kurva C tertutup dengan syarat batas

$$\phi = f_1(x,y),(x,y)\in C_1 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = f_2(x,y),(x,y)\in C_2 \tag{2}$$

dimana $f_1$dan f_2 dalah fungsi yang telah ditentukan dan C_1 dan C_2 adalah fungsi yang tidak beririsan sehingga $C_1UC_2=C$. Turunan normal $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ dari persamaan di atas adalah

$$\text{P} = \frac{\partial\phi}{\partial n} = n_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+n_y\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{3}$$

dimana $n_x \& n_y$ merupakan komponen-komponen *x* dan *y* unit vektor normal di kurva C. Unit vektor normal (n_x,n_y) pada C menunjukkan jarak titik dari daerah R. Dengan demikian (n_x,n_y) adalah fungsi dari *x* dan *y*.

Metode yang digunakan untuk menyelesaikan masalah ini adalah Metode elemen batas (MEB). Salah satu keunggulan utama MEB adalah keunikan fiturnya dalam hal pengurangan dimensi masalah, masalah dengan domain tiga dimensi dijadikan masalah dua dimensi dan masalah berdomain dua dimensi menjadi masalah satu dimensi. Keunggulan lain dari MEB

---

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

adalah kemampuan menangani masalah untuk domain terbuka (tak terbatas) yang biasanya muncul pada masalah eksterior.

Prosedur MEB dimulai dengan mentransformasi persamaan diferensial parsil yang mengatur domain menjadi sebuah persamaan integral dimana integralnya dikenakan pada batas domain. Kemudian persamaan integral batas ini didiskritisasi menjadi sejumlah persamaan integral yang dikenakan pada panel atau elemen batas domain. Pada setiap panel, syarat batas diasumsikan konstan, berubah secara linier, kuadratik dan seterusnya. Diskritisasi integral batas ini menghasilkan suatu sistem persamaan linier dari mana solusi masalah dapat diperoleh [2].

2. Pernyataan Masalah Nilai Batas

2.1 Persamaan Pengatur

Persamaan pengatur untuk masalah ini adalah suatu persamaan eliptik dua dimensi berbentuk

$$\lambda_{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \, \partial x_j} + \beta\phi = 0 \tag{4}$$

dimana ϕ adalah fungsi yang dicari, x_i komponen koordinat titik, koefisien λ_{ij} dan β adalah konstanta riil yang mencerminkan karakteristik medium yang digunakan dan indeks i, j = 1, 2. matriks koefisien $\lfloor \lambda_{ij} \rfloor$ adalah matriks definit positif yaitu $\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2 > 0$ dan simetris yaitu $\lambda_{12} = \lambda_{21}$.

Dalam persamaan (4) konvensi penjumlahan pada indeks berulang diasumsikan berlaku, sehingga secara eksplisit pers. (4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \, \partial x_2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \beta\phi = 0$$

Kasus isotropik adalah kasus khusus yang terjadi bila $\lambda_{11} = \lambda_{22}$ dan $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$. Untuk kasus ini, persamaan (4) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \beta' \phi = 0, \qquad \beta' = \beta / \lambda_{11} \tag{5}$$

dan bila $\beta' = 0$ maka persamaan (5) disebut persamaan Laplace, sedangkan bila $\beta' > 0$ maka persamaan (5) di sebut persamaan Helmholtz.

2.2 Syarat Batas/Domain

Bentuk Persamaan Laplace

$$\nabla^2 \phi = \nabla.(\nabla\phi) = 0 \tag{6}$$

memiliki 3 jenis syarat batas:

1. **Dirichlet** jika fungsi unknown dibebankan atas sebagian dari batas itu, yaitu $\phi(\mathrm{x}) = a(s)$, s adalah suatu sistem koordinat sepanjang batas.
2. **Neumann** jika derivative normal dari fungsi diketahui $\nabla\phi.\mathbf{n} = q(s)$, dimana **n** adalah unit normal yang keluar.
3. **Robin** jika berbentuk $\alpha\phi + \beta\nabla\phi.\mathbf{n} = r(s)$. Suatu masalah memerlukan spesifikasi hanya satu jenis syarat batas atas bagian manapun dari batas itu, yakni nilai fungsi yang ditetapkan, atau derivative normal, tetapi bukan kedua-duanya.

Data yang berada pada bentuk batas adalah bagian dari spesifikasi masalah dan dapat menjadi sebarang kecuali beberapa kendala minor. Sebagai contoh, jika syarat Neumann diterapkan pada batas keseluruhan, lalu solusi dapat ditentukan hanya sampai kepada suatu konstanta aditif, yakni jika ϕ adalah suatu solusi dari $\nabla^2\phi = 0$ dengan $\nabla\phi.\mathbf{n} = q$, maka solusinya adalah $\phi + C$ dimana C adalah suatu konstan sebarang. Pada kasus ini, perubahan harus memenuhi suatu syarat yang compatabilas yang dapat diperoleh dengan menerapkan teorema divergensi pada persamaan (6), sehingga

$$\int_\Omega \nabla^2\phi\, dA = \int_{\partial\Omega} \nabla\phi\,.\,\mathbf{n}\, ds = \int_{\partial\Omega} q\; ds = 0 \qquad (7)$$

3. Persamaan Integral Batas

Misalkan suatu fungsi G, solusi dari persamaan Laplace berbentuk:

$$\nabla^2\mathrm{G} = \mathrm{Q}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i}) \qquad (8)$$

dimana $\mathrm{Q}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i})$ adalah suatu fungsi yang bergantung pada variabel ruang x dan pada titik asal x_i. Bila kedua ruas dari persamaan (8) diperkalikan dengan fungsi ϕ dan persamaan (6) dikalikan dengan G, kemudian hasilnya diperkurangkan, diperoleh:

$$\phi\nabla^2\mathrm{G} - \mathrm{G}\nabla^2\phi = \phi\,\mathrm{G}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i}) \qquad (9)$$

Jika persamaan di atas diintegralkan pada domain Ω, maka :

$$\int_\Omega \left(\phi\nabla^2\mathrm{G} - \mathrm{G}\nabla^2\phi\right)dA = \int_\Omega \phi\,\mathrm{G}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i})dA \qquad (10)$$

Aturan rantai dari turunan dan teorema Divergensi Gauss dapat digunakan untuk mengubah ruas kiri menjadi persamaan integral batas, sehingga diperoleh :

$$\int_\Omega \left(\phi\nabla^2\mathrm{G} - \mathrm{G}\nabla^2\phi\right)dA = \int_\Omega \phi\,\mathrm{Q}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i})dA \qquad (11)$$

$$\int_\Omega \nabla.\left(\phi\nabla\mathrm{G} - \mathrm{G}\nabla\phi\right)dA = \int_\Omega \phi\,\mathrm{Q}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i})dA \qquad (12)$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{n}\,.\left(\phi\nabla\mathrm{G} - \mathrm{G}\nabla\phi\right)dS = \int_\Omega \phi\,\mathrm{Q}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i})dA \qquad (13)$$

$$\int_{\partial\Omega} \left(\phi\,\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial\mathrm{n}} - \frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{n}}\right)dS = \int_\Omega \phi\,\mathrm{Q}(\mathrm{x} - \mathrm{x_i})dA \qquad (14)$$

Fungsi Q yang ekuivalen dengan fungsi delta Dirac dan G yang menjadi ruang bebas fungsi Green terhubungkan, membolehkan untuk mengurangi integral pada ruas kanan persamaan (14). Dari definisi diperoleh :

$$\int_{\Omega} \phi\, \mathrm{Q}(\mathrm{x}-\mathrm{x_i})dA = \phi\,(\mathrm{x_i}) \tag{15}$$

Dengan demikian persamaan (14) menjadi :

$$\int_{\partial\Omega}\left(\phi\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{n}} - \mathrm{G}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{n}}\right)dS = \phi\,(\mathrm{x_i}) \tag{16}$$

Untuk menentukan ruang bebas fungsi Green, dapat digunakan persamaan Laplace pada kordinat polar , sehingga

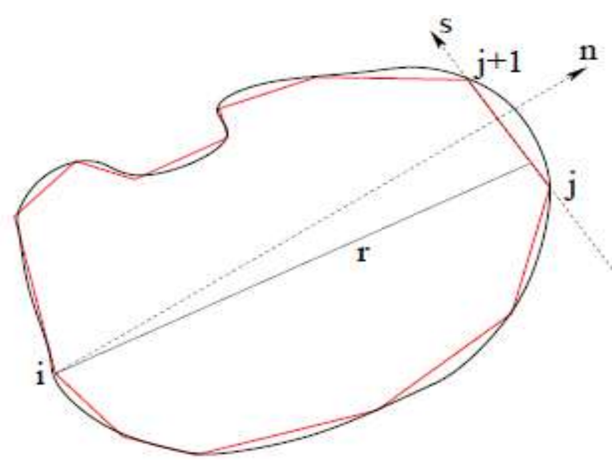
$$\int_{\partial\Omega}\left(\phi\,\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{n}} - \mathrm{G}\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{n}}\right)dS = \frac{\lambda}{2\pi}\,\phi\,(x_i), G = \frac{1}{2\pi}\ln|\mathrm{r}| \tag{17}$$

atau ekivalen dengan

$$\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\phi}{r}\frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{n}} - \ln|\mathrm{r}|\,\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{n}}\right)dS = \lambda\phi\,(x_i) \tag{18}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$r^2 = s^2 + n^2 \text{ dan } \frac{\partial \mathrm{r}}{\partial \mathrm{n}} = \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{r}} \tag{19}$$



Gambar 1. Pendikritisasian MEB dengan Segmen Garis Lurus. Titik Sumber (asal) Terletak pada x_i Sedangkan Titik pada Segmen Terletak pada Interval $s_j \leq s \leq s_{j+1}$.

Integral batas dapat diubah menjadi pendikritisasian pada segmen tunggal sedemikian sehingga persamaan (18) menjadi

$$\sum_{j=1}^{N}\int_{s_j}^{s_{j+1}}\left(\phi\,\frac{n}{s^2+n^2} - \frac{1}{2}\ln(s^2+n^2)\frac{\partial \phi}{\partial \mathrm{n}}\right) = \lambda\phi\,(x_i) \tag{20}$$

Bagian kedua dari pendiskritisasian adalah mengaproksimasi keragaman ϕ dan $\nabla\phi.n$ turunan normalnya pada batas.

$$\phi(s) = \frac{s-s_j}{\Delta s}\phi_{j+1} + \frac{s_{j+1}-s_j}{\Delta s}\phi_j \tag{21}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{n}}(\mathrm{s}) = \frac{s-s_j}{\Delta s}\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{n}}\bigg|_{\mathrm{j+1}} + \frac{s_{j+1}-s_j}{\Delta s}\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{n}}\bigg|_{\mathrm{j}} \tag{22}$$

Dengan Δs=$s_{j+1} - s_j$ adalah panjang segmen batas j. ϕ_j dan $\left.\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{n}}\right|_{\mathrm{j}}$ adalah koefisien yang akan dipilih untuk menyelesaikan persamaan integralnya.

Dengan mengganti pengapromaksian pada persamaan (20), diperoleh

$$\sum_{j=1}^{N}\left(K_{ij}\phi_j + K_{ij+1}\phi_{j+1}\right) - \lambda\phi(x_i) = \sum_{j=1}^{N}\left(R_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{n}}\bigg|_{\mathrm{j}} + R_{ij+1}\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{n}}\bigg|_{\mathrm{j+1}}\right) \tag{23}$$

dengan

$$K_{ij} = \frac{n}{\Delta s}\int_{s_j}^{s_{j+1}}\frac{s_{j+1}-s}{s^2+n^2}ds \tag{24}$$

$$K_{ij+1} = \frac{n}{\Delta s}\int_{s_j}^{s_{j+1}}\frac{s-s_j}{s^2+n^2}ds \tag{25}$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2\Delta s}\int_{s_j}^{s_{j+1}}(s_{j+1}-s)\ln(s^2+n^2)\,ds \tag{26}$$

$$R_{ij+1} = \frac{1}{2\Delta s}\int_{s_j}^{s_{j+1}}(s-s_j)\ln(s^2+n^2)ds \tag{27}$$

4. Hasil Numerik

4.1 Masalah Uji dengan Solusi Analitik

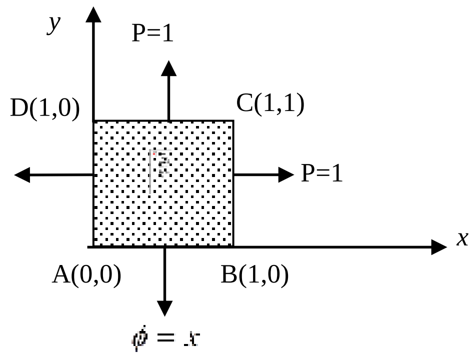
PD Laplace 2D yang akan diselesaikan berbentuk

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0 \tag{28}$$

Solusi analitik untuk persamaan di atas adalah

$$\phi(x,y) = x + y$$

dengan domain yang ditinjau berbentuk persegi $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,$ dengan syarat batas P yang dapat dihitung dari pers. (28), diketahui pada BC dan CD. ϕ seperti diberikan oleh pers.(28), diketahui pada AD dan AD. Koefisien λ_{ij} adalah λ_{11}= λ_{22}=1, λ_{12}=0 . Geometri medium dan syarat batas dari masalah adalah $(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.



Gambar 2. Geometri dari Masalah Uji.

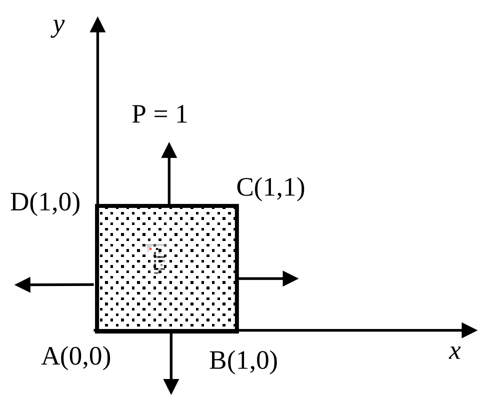
Tabel 1 berikut menunjukkan perbandingan antara solusi BEM dan solusi eksak dengan jumah elemen yang berbeda.

Tabel 1. Solusi BEM dan Eksak untuk Masalah Uji Isotropik.
Solusi interior:

Titik		**Solusi MEB**			**Solusi Eksak**		
		phi	**phi1**	**phi2**	**phi**	**phi1**	**phi2**
BEM 80 elemen							
0,1000	0,5000	0,5987	0,9978	0,9994	0,6000	1,0000	1,0000
0,3000	0,5000	0,7982	0,9980	0,9986	0,8000	1,0000	1,0000
0,5000	0,5000	0,9979	0,9982	0,9982	1,0000	1,0000	1,0000
0,7000	0,5000	1,1975	0,9982	0,9979	1,2000	1,0000	1,0000
0,9000	0,5000	1,3972	0,9987	0,9980	1,4000	1,0000	1,0000
BEM 160 elemen							
0,1000	0,5000	0,5993	0,9991	0,9998	0,6000	1,0000	1,0000
0,3000	0,5000	0,7992	0,9992	0,9994	0,8000	1,0000	1,0000
0,5000	0,5000	0,9990	0,9992	0,9992	1,0000	1,0000	1,0000
0,7000	0,5000	1,1989	0,9992	0,9991	1,2000	1,0000	1,0000
0,9000	0,5000	1,3987	0,9994	0,9991	1,4000	1,0000	1,0000

Titik		Solusi MEB			Solusi Eksak		
		phi	**phi1**	**phi2**	**phi**	**phi1**	**phi2**
				BEM 320 elemen			
0,1000	0,5000	0,5997	0,9996	0,9999	0,6000	1,0000	1,0000
0,3000	0,5000	0,7996	0,9996	0,9997	0,8000	1,0000	1,0000
0,5000	0,5000	0,9995	0,9997	0,9997	1,0000	1,0000	1,0000
0,7000	0,5000	1,1995	0,9996	0,9996	1,2000	1,0000	1,0000
0,9000	0,5000	1,3994	0,9997	0,9996	1,4000	1,0000	1,0000

Apabila diasumsikan bahwa medium adalah bahan anisoptropik dan memiliki koefisien $(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ maka perbandingan antara solusi BEM dan solusi eksak dengan jumah elemen yang berbeda akan ditunjukkan pada Tabel 2.



Gambar 3. Geometri dari Masalah Uji dengan Bahan Anisotropik.

Tabel 2. Solusi BEM dan eksak untuk masalah uji anisotropik
Solusi interior :

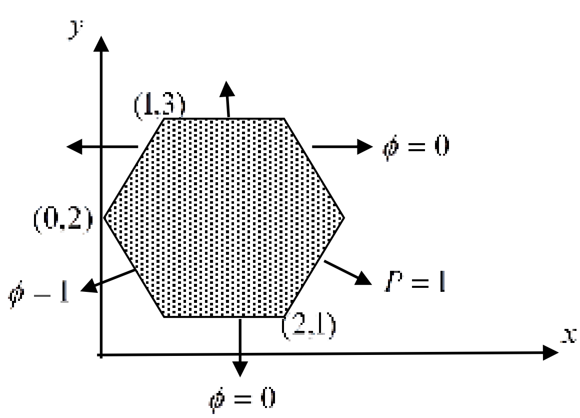
Titik		Solusi MEB			Solusi Eksak		
		phi	**phi1**	**phi2**	**phi**	**phi1**	**phi2**
				BEM 80 elemen			
0,1000	0,5000	0,5972	1,0048	1,0010	0,6000	1,0000	1,0000
0,3000	0,5000	0,7985	1,0072	0,9978	0,8000	1,0000	1,0000

0,5000	0,5000	1,0000	1,0079	0,9972	1,0000	1,0000	1,0000
0,7000	0,5000	1,2015	1,0072	0,9978	1,2000	1,0000	1,0000
0,9000	0,5000	1,4028	1,0047	1,0010	1,4000	1,0000	1,0000

Titik		**Solusi MEB**			**Solusi Eksak**		
		phi	**phi1**	**phi2**	**phi**	**phi1**	**phi2**
BEM 160 elemen							
0,1000	0,5000	0,5986	1,0029	0,9996	0,6000	1,0000	1,0000
0,3000	0,5000	0,7992	1,0036	0,9990	0,8000	1,0000	1,0000
0,5000	0,5000	1,0000	1,0039	0,9988	1,0000	1,0000	1,0000
0,7000	0,5000	1,2008	1,0036	0,9990	1,2000	1,0000	1,0000
0,9000	0,5000	1,4014	1,0029	0,9996	1,4000	1,0000	1,0000
BEM 320 elemen							
0,1000	0,5000	0,5993	1,0014	0,9998	0,6000	1,0000	1,0000
0,3000	0,5000	0,7996	1,0018	0,9995	0,8000	1,0000	1,0000
0,5000	0,5000	1,0000	1,0019	0,9994	1,0000	1,0000	1,0000
0,7000	0,5000	1,2004	1,0018	0,9995	1,2000	1,0000	1,0000
0,9000	0,5000	1,4007	1,0014	0,9998	1,4000	1,0000	1,0000

4.2 Masalah Uji Tanpa Solusi Analitik

Geometri medium dan syarat batas dari masalah adalah



Gambar 4. Geometri dari Masalah Uji.

apabila diasumsikan bahwa medium adalah bahan anisoptropik dan memiliki koefisien $(\lambda_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0,5 \\ 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Tabel 3. Solusi BEM dan Eksak untuk Masalah Uji Tanpa Solusi Analitik.
Solusi interior :

Titik		Solusi MEB			Solusi Eksak		
		phi	**phi1**	**phi2**	**phi**	**phi1**	**phi2**
				BEM 120 elemen			
0,5000	2,0000	0,8401	-0,3330	-0,3146			
1,0000	2,0000	0,6698	-0,3408	-0,3231			
1,5000	2,0000	0,5008	-0,3351	-0,3373			
2,0000	2,0000	0,3354	-0,3236	-0,3632			
2,5000	2,0000	0,1896	-0,2274	-0,6535			
				BEM 240 elemen			
0,5000	2,0000	0,8387	-0,3317	-0,3143			
1,0000	2,0000	0,6691	-0,3394	-0,3221			
1,5000	2,0000	0,5008	-0,3339	-0,3359			
2,0000	2,0000	0,3359	-0,3228	-0,3605			
2,5000	2,0000	0,1904	-0,2267	-0,6455			
				BEM 480 elemen			
0,5000	2,0000	0,8380	-0,3312	-0,3139			
1,0000	2,0000	0,6688	-0,3387	-0,3217			
1,5000	2,0000	0,5008	-0,3333	-0,3351			
2,0000	2,0000	0,3362	-0,3224	-0,3593			
2,5000	2,0000	0,1907	-0,2266	-0,6414			

5. Kesimpulan

Metode elemen batas (BEM) dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai batas baik yang diketahui solusi analitiknya maupun yang tidak diketahui solusi analitiknya. Solusi numerik yang diperoleh dengan BEM memperlihatkan hasil yang cukup akurat dan sesuai dengan yang diharapkan. Seiring dengan penambahan jumlah elemen, solusi numerik konvergen ke suatu solusi tertentu.

Daftar Pustaka

[1] Ang WT., 2007. *A Beginner's Course in Boundary Element Methods.* Universal Publishers, Boca Raton, USA.

[2] Azis M.I, 2009. *Mengenal Metode Elemen Batas dan Aplikasinya*.

[3] Kreyszig E., 1999. *Advanced Engineering Mathematics*. John Wiley & Sons Inc., New York.

[4] Nakhle H.A, 2005. *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problem*. Person Prentice Hall, New Jersey.