ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 13, No. 1, 85-90, Juli 2016

Penerapan Teorema Perron-Frobenius pada Penentuan Distribusi Stasioner Rantai Markov

Jusmawati Massalesse *

Abstrak

Perilaku suatu rantai Markov setelah berjalan cukup lama dapat diketahui melalui distribusi limit peluangnya. Sifat ergodik dan reguler rantai Markov menjamin eksistensi limit peluang. Dalam tulisan ini, diperlihatkan bahwa nilai eigen Perron-Frobenius dari matriks transisi rantai Markov adalah $\lambda_{pf} = 1$ dan normalisasi vektor eigen kiri yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_{pf} dari matriks transisi P merupakan distribusi stasioner rantai Markov.

Kata Kunci: Matriks stokastik, nilai eigen Perron-Frobenius, vektor eigen kiri.

1. Pendahuluan

Persoalan yang menarik untuk dikaji dari suatu rantai Markov antara lain adalah bagaimana peluang perpindahan dari satu keadaan ke keadaan yang lain, apakah setelah berpindah proses masih akan kembali ke keadaan awal, serta bagaimana proporsi waktu yang dibutuhkan oleh sistem untuk mencapai suatu keadaan setelah berlangsung cukup lama. Jika rantai Markov bersifat ergodik dan reguler, maka perpindahan antar keadaan akan selalu terjadi sehingga memungkinkan untuk mencapai suatu keadaan dari manapun proses berawal. Kemudian yang menjadi pertanyaan adalah, bagaimanakah distribusi peluang dari suatu rantai Markov setelah berjalan untuk jangka waktu yang sangat lama. Pertanyaan ini akan terjawab melalui distribusi stasioner dari rantai Markov. Teorema Perron Frobenius menjamin bahwa setiap matriks reguler memiliki nilai eigen Perron Frobenius. Tulisan ini menampilkan beberapa teorema dan akibat dari Teorema Perron Frobenius, khususnya yang berkaitan dengan matriks peluang transisi rantai Markov. Penerapan teorema ini pada matriks stokastik reguler memperlihatkan adanya kaitan antara vektor eigen kiri dari matriks transisi yang bersesuaian dengan nilai eigen Perron Frobenius dengan distribusi stasioner rantai Markov.

2. Landasan Teori

2.1. Rantai Markov

Misalkan $X = \{X_n, n = 0,1,2,...\}$ adalah proses stokastik dimana X_n menyatakan *keadaan* dari sistem pada saat n. Jika semua nilai dari X_n merupakan elemen dari suatu himpunan S, maka S disebut ruang keadaan. Untuk rantai Markov dengan ruang keadaan merupakan himpunan berhingga atau terhitung, maka himpunan S dapat dituliskan: $S = \{0,1,2...\}$. Penulisan $X_n = i$

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10, Tamalanrea, Makassar, email: jusmawati@gmail.com*

menyatakan bahwa proses berada di keadaan *i* pada saat *n*. Rantai Markov merupakan proses stokastik dengan ruang keadaan berhingga dan terhitung, serta memiliki sifat Markovian yang secara formal didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.
Proses Stokastik $X = \{X_n, n = 0,1,2,...\}$ *disebut rantai Markov dengan ruang keadaan S jika* $P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$, *untuk setiap* $i_0, i_1, ..., i_{n-1}, i, j \in S$ *dan untuk setiap* $n = 0,1,2,...$.

Notasi p_{ij} menyatakan peluang perpindahan atau peluang transisi dari keadaan *i* ke keadaan *j* dalam satu langkah atau transisi, dan memenuhi sifat:

$$p_{ij} \geq 0, \quad i, j \in S \text{ dan } \sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \quad i \in S .$$

Peluang perpindahan proses dari keadaan *i* ke keadaan *j* setelah mengalami n transisi dikenal sebagai peluang transisi n-langkah, dinotasikan dengan p_{ij}^n. Jadi $P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) = p_{ij}^n$. Untuk keperluan praktis, peluang transisi rantai Markov dituliskan dalam bentuk matriks peluang transisi *P* dimana p_{ij} merupakan elemen baris ke-*i* kolom ke-*j* dari *P*.

Kajian mengenai perilaku sistem dari suatu rantai Markov diawali dengan melihat klasifikasi dari keadaan-keadaan rantai Markov. Dan untuk memahami klasifikasi dan sifat rantai Markov, beberapa istilah diperkenalkan dalam definisi berikut ini.

Definisi 2.
Keadaan j dikatakan ***accessible*** *dari keadaan i jika terdapat* $n \geq 0$ *sedemikian sehingga* $p_{ij}^n > 0$
.

Definisi 3.
Keadaan i dikatakan ***berkomunikasi*** *dengan keadaan j jika keadaan i accessible dari j dan keadaan j accessible dari keadaan i.*

Keadaan *i* berkomunikasi dengan keadaan *j* ditulis dengan notasi $i \leftrightarrow j$. Konsep komunkasi " $i \leftrightarrow j$ " merupakan suatu kelas ekuivalensi. Dengan relasi ekuivalensi ini, ruang keadaan *S* akan terdiri atas satu atau beberapa kelas ekuivalensi. Jika suatu rantai Markov hanya memiliki satu kelas ekuivalensi maka rantai Markov tersebut dinamakan rantai Markov *irreducible.* Setiap kelas ekuivalensi bersifat *recurrent* atau *transient,* tergantung dari nilai $f_{ii} = \sum_{n=o}^{\infty} f_{ii}^n$, dimana f_{ii}^n adalah peluang suatu rantai Markov yang pada suatu saat berada di *keadaan i* akan kembali ke *i*. Jika $f_{ii} = 1$ maka *keadaan i* bersifat recurrent, sedangkan jika $f_{ii} < 1$ maka *keadaan i* bersifat transient. Sifat recurrent dari suatu keadaan berarti bahwa apabila proses berawal dari keadaan tersebut, maka proses akan selalu kembali ke keadaan tersebut. Sedangkan sifat transient dari suatu keadaan berarti bahwa jika rantai Markov pada suatu saat berada pada keadaan tersebut, maka terdapat peluang positif bahwa proses tidak akan kembali ke keadaan tersebut. Suatu keadaan yang bersifat *recurrent* dan memenuhi $\mu_{ii} = \sum_{n=o}^{\infty} n f_{ii}^n < \infty$ disebut bersifat positif *recurrent*.

Definisi 4.
Keadaan i dikatakan mempunyai ***periode*** *d(i)=d jika d adalah pembagi bersama terbesar dari himpunan* $\{n \mid\} p_{ii}^{n} > 0$.

Jika $d(i)$ = 1 untuk suatu $i \in S$ maka keadaan *i* dikatakan *aperiodic*. Suatu rantai Markov dikatakan *aperiodic* jika $d(i)$=1 untuk setiap $i \in S$. Rantai Markov yang bersifat *irreducible, recurrent positif* dan aperiodik disebut ergodik. Berikut ini sebuah teorema yang penting berkaitan dengan sifat ergodik dari suatu rantai Markov.

Teorema 1. (Ross, 2010)
Jika sebuah rantai Markov bersifat ergodik maka $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n}$ *ada dan bebas terhadap i. Dan jika dimisalkan*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n}, \quad j \geq 0, \tag{1}$$

maka π_j *merupakan penyelesaian satu-satunya dari persamaan:*

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i=0} \pi_i P_{ij}, \quad j \geq 0: \\ \sum_{j=0} \pi_j &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Jadi π_j merupakan limit peluang dari rantai Markov, yang menyatakan bahwa dimulai dari keadaan apapun, proses akan berada di keadaan *j* setelah *n* transisi. Selain itu, π_j dapat juga berarti proporsi waktu dari proses akan berada di keadaan *j* setelah berjalan cukup lama. Dan untuk rantai Markov ergodik, (π_j), *j* = 0,1,2 merupakan distribusi stasioner.

2.2. Matriks Stokastik dan Teorema Perron-Frobenius

Matriks stokastik adalah matriks dimana setiap elemen bernilai antara 0 dan 1 (termasuk 0 dan 1), dan jumlah elemen setiap baris adalah 1. Jadi matriks peluang transisi *P* adalah matriks stokastik. Disamping itu, matriks peluang transisi merupakan matriks tak negative karena setiap elemennya bernilai positif atau nol.

Banyak sifat dari matriks yang diturunkan dari matriks tak negatif. Beberapa sifat dan pengertian yang menjadi dasar kajian dalam tulisan ini seperti teorema Perron-Frobenius (tidak dibuktikan), nilai eigen Perron-Frobenius, vektor eigen kiri dan vektor eigen kanan mengelaborasi sifat-sifat dari matriks tak negative dan matriks stokastik.

Definisi 5.
Misalkan $A \in R_{nxn}$ *adalah matriks bujursangkar dan* λ *adalah nilai eigen A. Vektor* $x \neq 0$ *yang memenuhi* $Ax = \lambda x$ ($xA = \lambda x$) *disebut* ***vektor eigen-kanan*** *(vektor eigen kiri) dari A.*

Teorema 2. (Robinson, 2002)
Misalkan $A \in R_{nxn}$ *adalah matriks tak negatif dan regular, yaitu setiap elemen A tak negative dan* $A^{k} > 0$ *untuk suatu* $k \in N$, *maka:*

- *Terdapat nilai eigen* $\lambda_{pf} > 0$ *dengan vektor eigen kiri dan vektor eigen kanan positif,*
- *Untuk setiap nilai eigen* λ *dari A, jika* $\lambda \neq \lambda_{pf}$ *maka* $|\lambda| < \lambda_{pf}$ *,*
- *Nilai eigen* λ_{pf} *bersifat simple, yang berarti mempunyai multiplisitas 1.*

Nilai eigen λ_{pf} selanjutnya disebut *nilai eigen Perron-Frobenius* dari *A*. Sebuah akibat dari teorema Perron-Frobenius dinyatakan dalam Akibat berikut.

Akibat 1.
Jika A adalah matriks stokastik, maka A mempunyai vektor eigen tak negatif dengan nilai eigen 1.

3. Penerapan Nilai Eigen Perron-Frobenius dalam Menentukan Distribusi Peluang

Sebagai matriks stokastik dengan jumlah elemen setiap baris adalah 1, maka dengan mudah dapat dipahami bahwa vektor $\bar{1} = [1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1]^T$ merupakan vektor eigen kanan yang bersesuaian dengan nilai $\lambda = 1$.

Nilai eigen $\lambda = 1$ mempunyai multiplisitas 1, dan sekaligus merupakan nilai eigen Perron-Frobenius. Lebih khusus lagi, jika rantai Markov bersifat *irreducible*, *aperiodic* dan *reguler*, maka nilai-nilai eigen λ yang lain memenuhi $|\lambda| < 1$. Jadi $\lambda_{pf} = 1$. Dan jika diasumsikan *A* dapat didiagonalisasi, maka terdapat matriks invertible $C \in R_{nxn}$ sedemikian sehingga:

$$P = C\Lambda C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ : & : & \ldots & : \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

dimana kolom pertama *C* merupakan vektor $\bar{1} = [1 \quad 1 \quad \ldots \quad 1]^T$, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai eigen *P* yang bersifat $|\lambda_i| < 1, \quad i = 1,2,\ldots n$. Dari sifat matriks diagonal untuk sebarang $n \in N$ berlaku:

$$P^m = C\Lambda^m C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & \ldots & 0 \\ : & : & \ldots & : \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^m \end{bmatrix}.$$

Jika $m \to \infty$ maka $\lambda_i^m \to 0, \ \forall i = 2,3,\ldots n$, sehingga:

$$P^m \to C\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & : & \dots & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}C^{-1}. \tag{3}$$

Karena matriks Λ^m mempunyai elemen 1 pada baris pertama kolom pertama yang merupakan elemen satu-satunya yang tidak nol, dan kolom pertama C adalah vektor $\bar{1} = [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1]^T$, maka hasil perkalian pada persamaan (3) merupakan perkalian kolom pertama C dan baris pertama C^{-1}. Jadi

$$\begin{aligned} P^m &\to C\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ : & : & \dots & : \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}C^{-1} \\ &\to \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ : \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11}^{-1} & c_{12}^{-1} & .. & c_{1n}^{-1} \end{bmatrix} \\ &\to \begin{bmatrix} c_{11}^{-1} & c_{12}^{-1} & .. & c_{1n}^{-1} \\ c_{11}^{-1} & c_{12}^{-1} & .. & c_{1n}^{-1} \\ : & : & .. & : \\ c_{11}^{-1} & c_{12}^{-1} & .. & c_{1n}^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

dimana $\begin{bmatrix} c_{11}^{-1} & c_{12}^{-1} & \dots & c_{1n}^{-1} \end{bmatrix}$ adalah baris pertama C^{-1}. Dengan membandingkan persamaan (1) dan (4), diperoleh bahwa

$$\begin{bmatrix} c_{11}^{-1} & c_{12}^{-1} & \dots & c_{1n}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{bmatrix}.$$

Pada kenyataannya, baris pertama C^{-1} adalah vektor eigen-kiri dari P yang bersesuaian dengan nilai eigen 1 (sebut $\boldsymbol{v}^1$) , sehingga $\begin{bmatrix} c_{11}^{-1} & c_{12}^{-1} & \dots & c_{1n}^{-1} \end{bmatrix}$ merupakan normalisasi vektor eigen kiri tersebut ke vektor satuan. Dari sini disimpulkan bahwa normalisasi vektor eigen kiri yang bersesuaian dengan nilai eigen Perron-Frobenius $\lambda_{pf} = 1$ dari matriks transisi P merupakan limit peluang dan distribusi stasioner dari rantai Markov. Ilustrasi mengenai hasil yang diperoleh diterapkan pada sebuah contoh seperti berikut.

Contoh: Sebuah rantai Markov memiliki peluang transisi sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 & 0 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Tentukan distribusi peluang *P*.

Jawab: Asumsi ergodik dipenuhi oleh rantai Markov. Nilai eigen yang bersesuaian dengan matriks transisi *P* tersebut adalah $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,5, \lambda_2 = 0,2$. Vektor eigen kiri yang bersesuaian dengan nilai eigen Perron-Frobenius $\lambda_{pf} = 1$ adalah

$$v^1 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

Jadi distribusi limit rantai Markov adalah $\begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.6 \\ 0.1 \end{bmatrix}$. Hasil yang sama diperoleh dengan menyelesaikan persamaan (2).

Daftar Pustaka

Anynomous, 2010. Convergence of regular Markov chain, Lecture Note. Website: www.stanford.edu/class/ee363/lectures/pf.pdf, diakses pada tanggal 15 Desember 2010.

Clark, R.R., 2002. Perron-Frobenius theorem. Website: www.math.northwestern.edu/~clark/354/2002/**perron**.pdf, diakses pada tanggal 7 Desember 2010.

Mas275, 2010. Probability modeling: Lecture 9, Limiting and equilibrium behaviour of Markov chain. Website: www.shef.ac.uk/pas/MAS275/**mas27509**.pdf, diakses pada tanggal 12 Desember 2010.

Ross, S.M., 2010. *Introduction to Probability Model.* Elsevier Inc., Oxford, USA.