

# Penurunan Syarat Orde Metode Runge-Kutta dengan Deret Butcher

Muhtar\*

## Abstrak

Tulisan ini membahas aplikasi deret Butcher dalam penurunan syarat orde metode Runge-Kutta. Penurunan deret Butcher didasarkan pada deret Taylor dengan menggunakan representasi pohon berakar terhadap turunan elementer fungsi. Dengan menggunakan deret Butcher, kompleksitas penurunan metode Runge-Kutta dengan menggunakan deret Taylor bisa dihindari. Penurunan metode Runge-Kutta orde lima dipilih sebagai contoh aplikasi. Sistem persamaan non-linear yang terbentuk dari syarat orde diselesaikan dengan bantuan *software* Maple. Hasilnya diberikan dua varian metode Runge-Kutta orde lima.

**Kata Kunci:** Deret Taylor, deret Butcher, pohon berakar, turunan elementer, pembobot elementer, syarat orde.

## 1. Pendahuluan

Bentuk umum metode Runge-Kutta eksplisit dengan  $s$  langkah untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa yang berbentuk

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (1)$$

didefinisikan oleh

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + h \mathring{a} \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (2)$$

dimana  $k_1 = f(x_0, y_0)$  dan

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + \mathring{a} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j), \quad i = 2, 3, \dots, s. \quad (3)$$

Umumnya  $c_i$  memenuhi

$$c_i = \mathring{a} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad i = 2, 3, \dots, s. \quad (4)$$

Suatu metode Runge-Kutta orde  $p$  harus memenuhi syarat orde (*order condition*) tertentu yang umumnya membentuk sistem persamaan non-linear. Syarat orde ini ditentukan berdasarkan ekspansi deret Taylor kedua ruas persamaan (2) yang melibatkan persamaan (3) sebagai fungsi dari  $h$ . Sebagai contoh, sistem persamaan yang diberikan berikut merupakan syarat orde untuk metode Runge-Kutta orde 3.

\* Jurusan Pendidikan Matematika, FKIP, Universitas Dayanul Ikhsanuddin, Bau-Bau

$$\begin{aligned}
 b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\
 b_2 a_{21} + b_3 (a_{31} + a_{32}) &= \frac{1}{2} \\
 b_2 a_{21}^2 + b_3 (a_{31}^2 + a_{32}^2) &= \frac{1}{3} \\
 b_3 a_{32} a_{21} &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

Penurunan syarat orde dari metode Runge-Kutta dengan menggunakan ekspansi deret Taylor terkadang sangat kompleks dan kurang efisien karena banyaknya turunan fungsi yang harus dievaluasi. Untuk mengatasi masalah ini, representasi deret Taylor ke dalam deret Butcher dengan menggunakan pohon berakar (*rooted tree*) memegang peranan penting dalam analisis orde metode Runge-Kutta.

## 2. Pohon Berakar

Himpunan dari pohon (berakar)  $T$  didefinisikan secara rekursif sebagai berikut, (Hairer *et al.*, 2006):

- Graf  $t$  dengan hanya satu simpul (disebut akar) termuat pada  $T$ ;
- Jika  $t_1, t_2, \mathbf{K}, t_m \in T$ , maka graf yang ditentukan dengan menghubungkan akar-akar dari  $t_1, t_2, \mathbf{K}, t_m$  ke sebuah simpul baru juga termuat pada  $T$ . Operasi ini dinotasikan oleh  $t = [t_1, t_2, \mathbf{K}, t_m]$  dan simpul baru tersebut merupakan akar dari  $t$ .

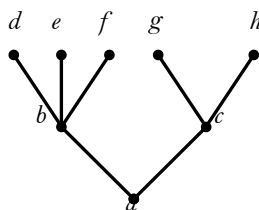
Berikut beberapa definisi penting dari pohon berakar yang akan digunakan dalam pembahasan selanjutnya.

**Definisi 1.** (Rattenburry, 2005)

Orde dari pohon berakar  $t$ ,  $r(t)$  didefinisikan oleh

$$r(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t = t \\ 1 + r(t_1) + \dots + r(t_m) & \text{jika } t = [t_1, t_2, \mathbf{K}, t_m] \end{cases}$$

Sebagai contoh, pohon berakar di bawah ini memiliki orde  $r(t) = 8$ .

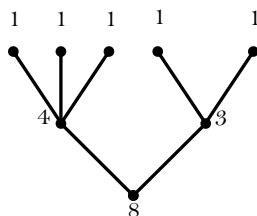


**Definisi 2.** (Rattenburry, 2005)

Kepadatan dari pohon berakar  $t = [t_1, t_2, \mathbf{K}, t_m]$ ,  $g(t)$  didefinisikan oleh

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t = t \\ r(t)g(t_1)g(t_2)\mathbf{L} g(t_m) & \text{jika } t = [t_1, t_2, \mathbf{K}, t_m] \end{cases}$$

Sebagai contoh, pohon berakar



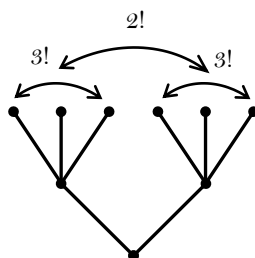
memiliki kepadatan  $g(t) = 1' 1' 1' 1' 1' 4' 3' 8 = 96$ .

**Definisi 3.** (Rattenburry, 2005)

Simetri dari pohon berakar  $t = [t_1^{n_1}, t_2^{n_2}, \mathbf{L}, t_m^{n_m}]$ ,  $s(t)$  dimana  $t_1, t_2, \mathbf{K}, t_k$  semuanya berbeda, didefinisikan oleh

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } t = t \\ n_1!n_2!\mathbf{L} n_m!s(t_1)^{n_1}s(t_2)^{n_2}\mathbf{L} s(t_m)^{n_m} & \text{jika } t = [t_1^{n_1}, t_2^{n_2}, \mathbf{L}, t_m^{n_m}] \end{cases}$$

Sebagai contoh, simetri pohon berakar



adalah  $s(t) = 3! 3! 2! = 72$ .

Secara ringkas, orde, kepadatan dan simetri dari pohon berakar sampai orde lima diberikan dalam tabel di bawah ini.

**Tabel 1.** Orde, Kepadatan dan Simetri dari Pohon Berakar sampai Orde 5.

$t$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$r(t)$	1	2	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$g(t)$	1	2	3	6	4	8	12	24	5	10	15	30	20	20	40	60	120
$s(t)$	1	1	2	1	6	1	2	1	24	2	2	1	2	6	1	2	1

### 3. Turunan Elementer dan Deret Butcher

Analisis keakuratan (orde) dari metode Runge-Kutta dilakukan dengan membandingkan ekspansi deret Taylor dari solusi eksak dengan solusi numeriknya. Untuk keperluan analisis tersebut, perhatikan persamaan differensial autonomus,

$$y'(x) = f(y(x)) \quad (5)$$

Ekspansi deret Taylor dari solusi eksak persamaan (5) diberikan oleh

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(x) + L$$

Dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh

$$y(x+h) = y(x) + hf(y(x)) + \frac{h^2}{2!}f'(y(x))(f(y(x))) + \frac{h^3}{3!}(f''(y(x))(f(y(x)), f(y(x))) + f'(y(x))(f'(y(x))(f(y(x)))))) + L$$

atau

$$y(x+h) = y(x) + h\mathbf{f} + \frac{h^2}{2!}\mathbf{f}'\mathbf{f} + \frac{h^3}{3!}(\mathbf{f}''(\mathbf{f}, \mathbf{f}) + \mathbf{f}'\mathbf{f}'\mathbf{f}) + L \quad (6)$$

Di sini digunakan notasi  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{f}'$  dan  $\mathbf{f}''$  untuk menyatakan secara singkat  $f(y(x))$ ,  $f'(y(x))$  dan  $f''(y(x))$  secara berturut-turut.

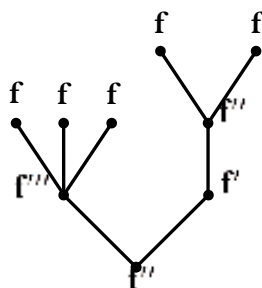
Ekspresi-ekspresi pada persamaan (6) yang muncul pada setiap suku dari  $h^i$  dinamakan turunan elementer (*elementary differential*). Turunan-turunan elementer tersebut selanjutnya akan direpresentasikan secara sederhana dengan menggunakan graf pohon berakar. Setiap  $\mathbf{f}$  menyatakan sebuah simpul, turunan pertama  $\mathbf{f}'$  menyatakan sebuah simpul dengan satu sisi dan turunan ke- $n$ ,  $\mathbf{f}^{(n)}$  menyatakan sebuah simpul dengan  $n$  buah sisi. Secara formal, turunan elementer  $F(t)(y)$  dinyatakan oleh definisi berikut.

**Definisi 4.** (Turunan Elementer, Hairer *et al*, 2006)

Untuk suatu pohon berakar  $t \in \hat{T}$ , turunan elementer adalah sebuah pemetaan  $F(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  yang didefinisikan

$$F(t)(y) = \begin{cases} \mathbf{f}(y) & \text{jika } t = \text{root} \\ \mathbf{f}^{(m)}(y)(F(t_1)(y), F(t_2)(y), \dots, F(t_m)(y)) & \text{jika } t = [t_1, t_2, \dots, t_m] \end{cases}$$

Sebagai contoh, turunan elementer dari pohon berakar di bawah ini adalah  $F(t)(y) = \mathbf{f}''(\mathbf{f}'''(\mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}), \mathbf{f}'\mathbf{f}'(\mathbf{f}, \mathbf{f}))$ .



Turunan fungsi ke- $n$  dari  $y(x)$  dari orde tertentu dapat dinyatakan secara unik sebagai kombinasi linear dari turunan-turunan elementer. Hal ini dinyatakan oleh teorema berikut.

**Teorema 1.** (Hairer *et al*, 2006)

Turunan ke- $n$  dari solusi eksak persamaan (5) diberikan oleh

$$y^{(n)}(x) = \sum_{r(t)=n} \hat{a} a(t) F(t)(y(x))$$

dimana  $a(t)$  adalah koefisien bulat positif.

Teorema di atas menyatakan ekspresi deret Taylor ke dalam deret formal yang melibatkan turunan-turunan elementer dari fungsi  $y(x)$ .

**Definisi 5.** (Deret Butcher, Hairer *et al*, 2006)

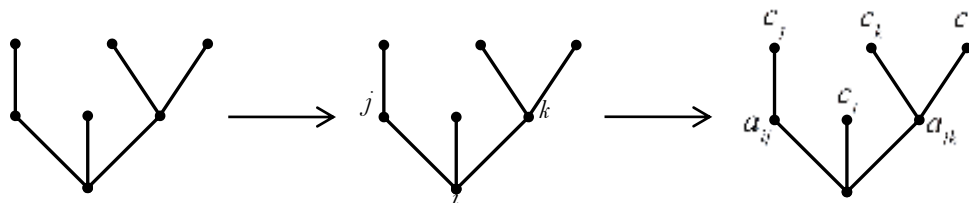
Untuk pemetaan  $a : T \rightarrow \{\mathbb{Q}\} \times \mathbb{R}^+$ , deret formal yang dinyatakan oleh

$$B(a(t), y(x)) = a(\emptyset)y(x) + \sum_{t \in T} \frac{a(t)}{s(t)} h^{r(t)} F(t)(y(x))$$

disebut deret Butcher (deret-B).

#### 4. Pembobot Elementer

Koefisien dari ekspansi deret Taylor pada metode Runge-Kutta yang diberikan oleh persamaan (2) dan (3) disebut pembobot elementer (*elementary weight*)  $F(t)$ , yang dapat ditentukan dari pohon  $t$  untuk semua  $t \in T$  sampai orde tertentu. Berikut contoh menentukan pembobot elementer dari sebuah pohon berakar dengan tujuh simpul.



Pertama, dengan memulai dari akar, setiap cabang yang mengarah keluar dilabelkan dengan  $i, j, k, L$ , kecuali simpul terminal. Kedua, akar diberi nama  $b_i$  dan simpul lain dengan  $a_{**}$  kecuali simpul terminal. Subindeks pertama pada  $a_{**}$  menyatakan simpul orangtua (*parent*) sedangkan subindeks kedua menyatakan simpul yang bersesuaian. Terakhir, simpul terminal diberi nama  $c_*$ , dimana subindeks pada  $c_*$  menyatakan simpul orangtua. Pembobot elementer merupakan jumlah dari semua hasil kali kuantitas-kuantitas ini. Dengan demikian pembobot elementer yang dimaksud pada pohon berakar di atas adalah

$$F(t) = \mathring{\mathbf{a}}_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j c_i a_{ik} c_k c_k = \mathring{\mathbf{a}}_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j c_i a_{ik} c_k^2$$

**Definisi 5.** (Lee, 2004)

Untuk metode Runge-Kutta dengan  $s$  langkah, pembobot elementer,  $F(t)$  didefinisikan oleh

$$F(t) = \begin{cases} \mathring{\mathbf{a}}_{i=1}^s b_i & \text{jika } t = t \\ \mathring{\mathbf{a}}_{i=1}^s b_i F_i(t_1) F_i(t_2) \dots F_i(t_m) & \text{jika } t = [t_1, t_2, \dots, t_m] \end{cases}$$

dimana  $F_i(t)$  adalah pembobot elementer langkah ke- $i$  dan didefinisikan oleh

$$F_i(t) = \begin{cases} \mathring{\mathbf{a}}_{i=1}^s a_{ij} = c_i & \text{jika } t = t \\ \mathring{\mathbf{a}}_{i=1}^s a_{ij} F_j(t_1) F_j(t_2) \dots F_j(t_m) & \text{jika } t = [t_1, t_2, \dots, t_m] \end{cases}$$

Pembobot elementer pohon berakar sampai orde lima tersaji pada Tabel 2.

## 5. Syarat Orde

Syarat orde metode Runge-Kutta merupakan himpunan persamaan yang diperoleh dengan membandingkan koefisien ekspansi deret Taylor dari solusi eksak dengan solusi numeriknya. Solusi eksak ini merupakan ekspansi deret Taylor ruas kanan persamaan (2) di sekitar titik  $x_0$ , yaitu

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2!} y''(x_0) + \dots + \frac{h^p}{p!} y^{(p)}(x_0) + O(h^{p+1}) \\ &= y(x_0) + \mathring{\mathbf{a}}_{k=1}^p \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_0) + O(h^{p+1}) \end{aligned} \quad (7)$$

yang dapat dinyatakan sebagai

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \mathring{\mathbf{a}}_{i \in T} h^{r(i)} \frac{1}{s(i)g(i)} F(i)(y(x_0)) + O(h^{p+1}). \quad (8)$$

menurut Teorema 1.

Selanjutnya, dengan menggunakan deret Butcher, solusi numerik di titik  $x_0$  dapat ditentukan dengan menggunakan pembobot elementer  $F(t)$  untuk setiap pohon  $t \in T$ , yaitu

$$y(x_0 + h) = y(x_0) + \mathring{\mathbf{a}}_{i \in T} h^{r(i)} \frac{1}{s(i)} F(i)(y(x_0)) + O(h^{p+1}). \quad (9)$$

Dengan membandingkan persamaan (8) dan (9), diperoleh

$$F(t) = \frac{1}{g(t)} \quad (10)$$

Hasil penting ini, secara formal dinyatakan oleh teorema berikut ini.

**Teorema 2.** (Hairer *et al*, 2006)

*Metode Runge-Kutta memiliki orde p jika dan hanya jika*

$$F(t) = \frac{1}{g(t)} \text{ untuk } r(t) \leq p.$$

## 6. Metode Runge-Kutta Orde Lima

Berdasarkan Teorema 2 dan hasil-hasil sebelumnya, syarat orde metode Runge-Kutta orde lima tersaji secara lengkap pada Tabel 2. Dengan demikian terdapat sebanyak 17 persamaan non-linear. Untuk menjamin konsistensi penyelesaian sistem persamaan tersebut, maka banyaknya langkah ( $s$ ) yang dipilih adalah 6.

Dengan terlebih dahulu melakukan penyederhaan dan dengan bantuan *software* Maple untuk menyelesaikan secara serentak sistem persamaan tersebut, diperoleh dua varian dari metode Runge-Kutta eksplisit orde lima berikut:

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) &= y(x_0) + \frac{1}{90}h(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6) \\ k_1 &= f(x_0, y_0) \\ k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{4}h, y_0 + \frac{1}{4}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{4}h, y_0 + \frac{1}{8}k_1 + \frac{1}{8}k_2\right) \\ k_4 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 - \frac{1}{2}k_2 + k_3\right) \\ k_5 &= f\left(x_0 + \frac{3}{4}h, y_0 + \frac{3}{16}k_1 + \frac{9}{16}k_4\right) \\ k_6 &= f\left(x_0 + h, y_0 - \frac{3}{7}k_1 + \frac{2}{7}k_2 + \frac{12}{7}k_3 - \frac{12}{7}k_4 + \frac{8}{7}k_5\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y(x_0 + h) &= y(x_0) + \frac{1}{120}h(11k_1 + 81k_3 - 64k_4 + 81k_5 + 11k_6) \\
k_1 &= f(x_0, y_0) \\
k_2 &= f\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{3}k_1\right) \\
k_3 &= f\left(x_0 + \frac{1}{3}h, y_0 + \frac{1}{6}k_1 + \frac{1}{6}k_2\right) \\
k_4 &= f\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{8}k_1 + \frac{3}{8}k_2\right) \\
k_5 &= f\left(x_0 + \frac{2}{3}h, y_0 + \frac{2}{27}k_1 + \frac{1}{9}k_2 + \frac{1}{3}k_3 + \frac{4}{27}k_4\right) \\
k_6 &= f\left(x_0 + h, y_0 - \frac{1}{22}k_1 + \frac{3}{22}k_2 + \frac{27}{11}k_3 - 4k_4 + \frac{27}{11}k_5\right)
\end{aligned}$$

**Tabel 2.** Pembobot Elementer dari Pohon Berakar sampai Orde 5.

$t$	$r(t)$	$F(t)(y)$	$F(t)$	$\frac{1}{g(t)}$
1	1	<b>f</b>	$\overset{s}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} b_i$	1
2	2	<b>ff</b>	$\overset{s}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} b_i c_i$	$\frac{1}{2}$
3	3	<b>f''(f, f)</b>	$\overset{s}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} b_i c_i^2$	$\frac{1}{3}$
4	3	<b>fff</b>	$\overset{s}{\underset{i,j=1}{\mathring{a}}} b_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{6}$
5	4	<b>f'''(f, f, f)</b>	$\overset{s}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} b_i c_i^3$	$\frac{1}{4}$
6	4	<b>f''(f, ff)</b>	$\overset{s}{\underset{i,j=1}{\mathring{a}}} b_i c_i a_{ij} c_j$	$\frac{1}{8}$
7	4	<b>ff''(f, f)</b>	$\overset{s}{\underset{i,j=1}{\mathring{a}}} b_i a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{12}$
8	4	<b>ffff</b>	$\overset{s}{\underset{i,j,k=1}{\mathring{a}}} b_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{24}$
9	5	<b>f<sup>(4)</sup>(f, f, f, f)</b>	$\overset{s}{\underset{i=1}{\mathring{a}}} b_i c_i^4$	$\frac{1}{5}$
10	5	<b>f'''(f, f, ff)</b>	$\overset{s}{\underset{i,j=1}{\mathring{a}}} b_i c_i^2 a_{ij} c_j$	$\frac{1}{10}$
11	5	<b>f''(f, f''(f, f))</b>	$\overset{s}{\underset{i,j=1}{\mathring{a}}} b_i c_i a_{ij} c_j^2$	$\frac{1}{15}$
12	5	<b>f''(f, fff)</b>	$\overset{s}{\underset{i,j,k=1}{\mathring{a}}} b_i c_i a_{ij} a_{jk} c_k$	$\frac{1}{30}$



13	5	$\mathbf{f}''(\mathbf{f}\mathbf{f}, \mathbf{f}\mathbf{f})$	$\mathring{\mathbf{a}}_{i=1}^s b_i (\mathring{\mathbf{a}}_{j=1}^s a_{ij} c_j)^2$	$\frac{1}{20}$
14	5	$\mathbf{f}'(\mathbf{f}'''(\mathbf{f}, \mathbf{f}, \mathbf{f}))$	$\mathring{\mathbf{a}}_{i,j=1}^s b_i a_{ij} c_j^3$	$\frac{1}{20}$
15	5	$\mathbf{f}\mathbf{f}''(\mathbf{f}, \mathbf{f}\mathbf{f})$	$\mathring{\mathbf{a}}_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} c_j a_{jk} c_k$	$\frac{1}{40}$
16	5	$\mathbf{f}\mathbf{f}\mathbf{f}''(\mathbf{f}, \mathbf{f})$	$\mathring{\mathbf{a}}_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} c_k^2$	$\frac{1}{60}$
17	5	$\mathbf{f}\mathbf{f}\mathbf{f}\mathbf{f}\mathbf{f}\mathbf{f}$	$\mathring{\mathbf{a}}_{i,j,k=1}^s b_i a_{ij} a_{jk} a_{kl} c_l$	$\frac{1}{120}$

## 7. Kesimpulan

Syarat orde suatu metode Runge-Kutta orde tertentu dapat ditentukan dengan hanya mencari semua kombinasi pohon berakar sampai orde yang bersesuaian. Dengan demikian, kompleksitas penurunan metode Runge-Kutta yang melibatkan evaluasi turunan-turunan fungsi pada ekspansi deret Taylor bisa dihindari.

## Daftar Pustaka

- [1] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G., 1987, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer.
- [2] Hairer E., Lubich C., Wanner G., 2006, *Geometric Numerical Integration, Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*, Springer.
- [3] Lee, J.H.J., 2004, *Numerical methods for ordinary differential equations*, MSc Thesis, The University of Auckland.
- [4] Muhtar, 2001, *Solusi numerik persamaan diferensial biasa dengan metode Runge-Kutta orde lima*, Skripsi SI, Universitas Hasanuddin.
- [5] Rattenbury, N., 2005, *Almost Runge-Kutta methods for stiff and non-stiff problem*, PhD Thesis, The University of Auckland.