ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 2, 102-113, Januari 2014

# Bilangan Stirling dan Hubungannya dengan Beberapa Konsep Matematika

**Fifik Astuti [1], Loeky Haryanto [2] dan Hasmawati Basir [3]**

**Abstrak**

Dalam tulisan ini dibahas analogi, ekuivalensi dan keterkaitan antara bilangan-bilangan Stirling dengan konsep matematika yang lain: himpunan, permutasi, fungsi, faktorial (turun dan naik), determinan-1 dan deret Maclaurin. Pada khususnya analogi antara diferensi dan turunan bisa diturunkan dengan menggunakan bilangan-bilangan Stirling. Juga ekuivalensi beberapa definisi bilangan Stirling berdasarkan konsep partisi pada permutasi dan pada himpunan serta interpretasinya, juga disajikan. Pada penerapan konsep determinan-1, diberikan dua relasi rekurensi yang berbeda tetapi ekuivalen. Relasi rekurensi yang pertama menghasilkan sebuah barisan eigen sedangkan relasi rekurensi yang kedua menghasilkan barisan eigen yang sama, tetapi diturunkan dengan menerapkan determinan-1.

**Kata Kunci** : bilangan Stirling jenis pertama dan kedua, faktorial turun, partisi, relasi rekurensi, determinan-1.

**Abstract**

This paper presents mathematical analogues, equivalences and other relationships between Stirling numbers and other mathematical concepts: sets, permutations, functions, (falling or raising) factorial, differences, derivatives, Maclaurin series and 1-determinant. In particular an analogy between differences and derivatives can be established by means Stirling numbers. Also, some equivalent definitions of Stirling numbers based on partition over a permutation and over a set together with their interpretations, are provided. At the applications of 1-determinant, two different but equivalent recurrence relations are introduced. The first recurrence relation forms an eigen sequence, and the second recurrence relation derives the same eigen sequence, but its derivation makes use 1-determinant.

**Key Words :** Stirling's numbers of the first and the second kind, falling factorial, partitions, recurrence relations, 1-determinant.

## 1. Pendahuluan

Salah satu bentuk penelitian di dalam matematika adalah melakukan generalisasi terhadap suatu perumusan atau dalil matematis dan membuat analogi terhadap perumusan atau dalil matematis tersebut. Konsep bilangan Stirling didefinisikan berdasarkan generalisasi terhadap beberapa perumusan atau dalil yang sudah lebih dulu diketahui dan dipelajari oleh banyak matematikawan.

Di dalam matematika diskrit misalnya, salah satu generalisasi dikerjakan dengan cara memperlemah syarat bilangan bulat tak negatif $n$ di dalam ekspresi koefisien binomial[4]

[1] Program S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
[2] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
[3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \tag{1}$$

menjadi bilangan real $t$ di dalam ekspresi

$$\binom{t}{k} = \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!}. \tag{2}$$

Dalam tulisan ini, akan dibahas bentuk generalisasi lebih jauh dari generalisasi koefisien binomial (1) dan (2) serta kaitannya dengan beberapa konsep matematika yang lain.

## 2. Bilangan Stirling Jenis Pertama dan Kedua

Generalisasi bentuk (1) menjadi bentuk (2) membawa generalisasi permutasi

$$\mathrm{P}(n, k) = n(n-1)...(n-k+1)$$

ke bentuk yang serupa di mana syarat $n$ sebagai bilangan bulat tak negatif ditiadakan dan diganti oleh syarat yang lebih lemah: sembarang bilangan real $t$. Jadi bentuk permutasi $\mathrm{P}(n, k)$ dibawa ke bentuk yang didefinisikan dan diberi lambang

$$t^{\underline{k}} = t(t-1)\ldots(t-k+1). \tag{3}$$

Bentuk ini dinamakan **faktorial turun** (Charalambides, 2002). Dalam kasus $t = k$,

$$t^{\underline{k}} = k^{\underline{k}} = k(k-1)\ \ldots\ (1) = k!.$$

Secara alamiah, selain faktorial turun didefinisikan juga konsep **faktorial naik**

$$t^{\overline{k}} = t(t+1)\ldots(t+k-1). \tag{4}$$

Seperti halnya definisi faktorial nol $0! = 1$, di sini juga didefinisikan

$$t^{\underline{0}} = 1 = t^{\overline{0}}.$$

Jika $k$ faktor-faktor di ruas kanan (4) dibaca dengan urutan terbalik, diawali dari faktor $(t + k - 1)$, nilai faktor-faktor tersebut menurun sehingga diperoleh kesamaan

$$t^{\overline{k}} = (t+k-1)^{\underline{k}} \tag{5}$$

yang ruas kanannya faktorial turun sedangkan ruas kirinya faktorial naik.Kesamaan ini menyatakan bahwa setiap faktorial naik adalah faktorial turun,Demikian pula sebaliknya, setiap faktorial turun adalah juga faktorial naik. Dengan demikian, cukup digunakan faktorial turun di dalam definisi berikut.

**Definisi 2.1**

*Bilangan Stirling jenis pertama, diberi lambang* $s(n,k)$, *adalah koefisien dari jumlahan di ruas kanan kesamaan*

$$t^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k \tag{6}$$

*sedangkan bilangan Stirling jenis kedua, diberi lambang S(n,k), adalah koefisien di ruas kanan kesamaan*

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)t^{\underline{k}} \tag{7}$$

*Bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda adalah nilai mutlak dari bilangan Stirling jenis pertama dan diberi lambang* $|s(n,k)|$.

Dari ekspresi (3) diturunkan

$$t^{\underline{k}} = t(t-1)\ldots(t-k+2)(t-k+1) = [t(t-1)\ldots(t-(k-1)+1)](t-k+1)$$

yaitu

$$t^{\underline{k}} = (t-k+1)\,t^{\underline{k-1}} \tag{8}$$

sedangkan dari ekspresi (4) diturunkan

$$t^{\overline{k}} = t(t+1)\ldots(t+k-2)(t+k-1) = [t(t+1)\ldots(t+(k-1)-1)](t+k-1).$$

yaitu

$$t^{\overline{k}} = (t+k-1)\,t^{\overline{k-1}} \tag{9}$$

Relasi rekurensi suatu barisan adalah sebuah konsep penting pada pembahasan barisan yang memiliki sifat rekursif karena relasi rekurensi bisa digunakan sebagai definisi alternatif dari barisan tersebut. Dengan kata lain, dua barisan adalah sama jika keduanya memenuhi relasi rekurensi yang sama.

**Teorema 2.1**

*Bilangan-bilangan Stirling jenis pertama* $s(n,k)$ *dengan* $n = 0, 1, 2, \ldots$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$ *memenuhi relasi rekurensi*

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \tag{10}$$

*dengan nilai–nilai batas* $s(0,0) = 1$, $s(n,0) = 0$ *apabila* $n > 0$; *dan* $s(n,k) = 0$ *apabila* $n > 1$ *dan* $k > n$.

Bukti.

Untuk $n = 1$, kesamaan (10) jelas benar. Jika $n > 1$, uraikan kedua ruas kesamaan (8)

$$t^{\underline{n}} = (t-n+1)\,t^{\underline{n-1}}$$

kemudian dengan menggunakan (5), diperoleh

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k = (t-n+1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)t^{k+1} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)t^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s(n-1,k-1)t^k - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)t^k$$

(setelah transformasi indeks $k \to k-1$). Persamaan terakhir ini menyatakan

$$s(n,0) + \sum_{k=1}^{n-1} s(n,k)t^k + s(n,n)t^n =$$

$$s(n-1,n-1)t^n + \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k-1)t^k - (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)t^k + s(n-1,0)$$

Dari syarat batas diperoleh $s(n,0) = s(n-1,0) = 0$ dan mengingat $s(n,n)$ adalah koefisien suku $t^n$ di dalam uraian ruas kiri dan ruas kanan ekspresi (6) maka $s(n,n) = 1 = s(n-1,n-1)$ dan

$$\sum_{k=1}^{n-1} s(n,k)t^k = \sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k-1)t^k - (n-1)\sum_{k=1}^{n-1} s(n-1,k)t^k.$$

Dari definisi kesamaan dua polinom, kesamaan (10) terbukti. ■

Relasi rekurensi untuk bilangan Stirling jenis kedua dibuktikan dengan bantuan lemma berikut.

**Lemma 2.2**

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)t^{\underline{k}} = t\sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)t^{\underline{k}} \tag{11}$$

*Bukti*.

Ekspresi (7) untuk indeks pangkat $n$ – 1 berbentuk

$$t^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)t^{\underline{k}}.$$

Dengan menguraikan kesamaan $t^n = tt^{n-1}$, diperoleh kesamaan (11). ■

**Lemma 2.3**

$$tt^{\underline{k-1}} = t^{\underline{k}} + (k-1)t^{\underline{k-1}}. \qquad (12)$$

*Bukti*.

Untuk $k$ = 1 diperoleh $tt^{\underline{0}} = t^{\underline{1}}$ atau $t = t$.

Misalkan kesamaan (12) benar untuk indeks $k$ – 1, ini berarti

$$\begin{aligned}
tt^{\underline{k}} &= t(t-k+1)t^{\underline{k-1}} = (t-k+1)tt^{\underline{k-1}} \\
&= (t-k+1)(t^{\underline{k}} + (k-1)t^{\underline{k-1}}) = (t-k)(t^{\underline{k}} + (k-1)t^{\underline{k-1}}) + t^{\underline{k}} + (k-1)t^{\underline{k-1}} \\
&= [(t-k)(t^{\underline{k}} + (k-1)t^{\underline{k-1}})] + [t^{\underline{k}} + (k-1)t^{\underline{k-1}}] \\
&= [(t-k)t^{\underline{k}}] + [(t-k)(k-1)t^{\underline{k-1}}] + [t^{\underline{k}} + (k-1)t^{\underline{k-1}}] \\
&= t^{\underline{k+1}} + [(t-k)(k-1)t^{\underline{k-1}} + (k-1)t^{\underline{k-1}}] + t^{\underline{k}} \\
&= t^{\underline{k+1}} + (k-1)(t-k+1)t^{\underline{k-1}} + t^{\underline{k}} \\
&= t^{\underline{k+1}} + (k-1)t^{\underline{k}} + t^{\underline{k}} \\
&= t^{\underline{k+1}} + kt^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

■

**Teorema 2.4**

*Bilangan-bilangan Stirling jenis kedua s*($n$,$k$) *dengan* $n$ = 0, 1, 2, … *dan* $k$ = 0, 1, …, $n$ *memenuhi relasi rekurensi*

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) \qquad (13)$$

*dengan nilai–nilai batas* $S(0,0) = 1$, $S(n,0) = 0$ *apabila* $n > 0$; *dan* $S(n,k) = 0$ *apabila* $n > 1$ *dan* $k > n$.

*Bukti*.

Untuk $n$ = 1, kesamaan (13) jelas benar.

Jika $n$ > 1, dengan menggunakan Lemma 2 dan 3 diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} S(n,k)t^{\underline{k}} &= t\sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)t^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} S(n-1,k)t^{\underline{k+1}} + k\sum_{k=0}^{n} S(n-1,k)t^{\underline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} S(n-1,k-1)t^{\underline{k}} + k\sum_{k=0}^{n} S(n-1,k)t^{\underline{k}}
\end{aligned}$$

(setelah transformasi $k \to k - 1$ pada suku-suku jumlahan pertama).

Karena $n$ > 1 maka $S(n, 0) = 0 = S(n-1, 0)$ dan kesamaan di atas menjadi

$$\sum_{k=1}^{n} S(n,k)t^{\underline{k}} = \sum_{k=1}^{n} S(n-1,k-1)t^{\underline{k}} + k\sum_{k=1}^{n} S(n-1,k)t^{\underline{k}}$$

sehingga diperoleh relasi rekurensi (13). ■

**Lemma 2.5**

*Jika diberikan $n > 0$ dan $k = 0, 1, \ldots, n$, maka bilangan Stirling jenis pertama $s(n,k)$ bernilai negatif jika dan hanya jika $n - k$ adalah bilangan bulat ganjil.*

*Bukti.*

Dari (6) diturunkan

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^{k} &= t^{\underline{n}} \\ &= t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1) \\ &= t(t+(-1))(t+(-2))\cdots(t+(-n+1))\end{aligned}$$

Jika ruas kanan yang berbentuk perkalian diuraikan atas suku-suku perpangkatan $t$ maka diperoleh bentuk penjumlahan sehingga

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^{k} &= \overbrace{(-1)(-2)\cdots(-n+1)}^{s(n,1)}t + \ldots + \overbrace{\sum_{\cdots}(-i_1)(-i_2)\cdots(-i_{n-k})}^{s(n,k)}t^{k} + \ldots + \overbrace{s(n,n)}^{1}\, t^{n} \\ &= \overbrace{(-1)(-2)\cdots(-n+1)}^{s(n,1)}t + \ldots + \overbrace{\sum_{\cdots}(-1)^{n-k} i_1 i_2\cdots i_{n-k}}^{s(n,k)}t^{k} + \ldots + s(n,n-1)t^{n-1} + t^{n}\end{aligned}$$

di mana penjumlahan $\Sigma$ berjalan pada semua himpunan $\{i_1, i_2, ..., i_{n-k}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ berukuran $n - k$ yang berbeda. Jadi jelas $s(n, k) < 0$ jika dan hanya jika $(-1)^{n-k} < 0$ dan jika dan hanya jika $n - k$ ganjil. ■

**Teorema 2.6** (Charalambides, 2002)

*Bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda $|s(n,k)|$ adalah koefisien-koefisien polinom di ruas kanan*

$$(t+n-1)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k)t^{k}, \qquad (14)$$

*di mana $n = 1, 2, \ldots$ .*

*Bukti.*

Ruas kiri ekspresi (14) adalah

$$\begin{aligned}(t+n-1)^{\underline{n}} &= (t)(t+1)\ldots(t+n-1) \\ &= (-1)^{n}(-t)(-t-1)\ldots(-t-n+1) \\ &= (-1)^{n}(-t)^{\underline{n}} \\ &= (-1)^{n}\sum_{k=0}^{n} s(n,k)(-t)^{k}. \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n} s(n,k)(-t)^{k}\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) t^k$$

Berdasarkan Lema 2.5, $s(n, k) < 0$ jika dan hanya jika $n - k$ ganjil sehingga

$$(-1)^{n-k} s(n, k) = |s(n, k)|.$$

Sebagai akibatnya, (14) terbukti. ■

Salah satu fakta menarik dari bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda adalah kenyataan bahwa bilangan-bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda bisa didefinisikan dengan lebih dari satu cara pendefinisian.

**Teorema 2.7**

*Bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda* $|s(n,k)|$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n = 2, 3, \ldots,$ *nilainya adalah*

$$|s(n,k)| = \sum i_1 i_2 \ldots i_{n-k}\,, \tag{15}$$

*dimana indeks jumlahan* $\Sigma$ *berjalan pada semua kemungkinan subhimpunan* $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\text{-}1\}$ *yang berbeda dan terdiri atas* $n - k$ *unsur-unsur*.

*Bukti*.

Pada hasil kali $n$ faktor di ruas kiri ekpresi (14)

$$t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-1) = \sum_{k=0}^{n} |\,s(n,k)\,|\, t^k$$

setiap faktor ke-$i$ dari perkalian pada ruas paling kiri berbentuk

$$p_i(t) = t + i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$$

Jadi koefisien setiap bentuk $t^k$ yang terbentuk diperoleh dari jumlahan suku-suku hasil perkalian sebanyak $n - k$ konstanta dari $i_1, i_2, \ldots, i_{n-k} \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$, $j = 1, 2, \ldots, n - k$.

■

**Contoh**:

Akan ditentukan bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda $|s(5,2)|$, yaitu koefisien dari monomial $t^k = t^2$ di dalam polinom faktorial naik (3)

$$t(t + 1)(t + 2)(t + 3)(t + 4) = s(n, 1)t + \ldots + |s(5, 2)|t^2 + \ldots + s(n,n)t^n.$$

Di sini $n = 5$ dan $k = 2$ sehingga dari Teorema 2.7, koefisien $|s(5, 2)|$ dari perpangkatan $t^2$ dalam polinom ini adalah hasil jumlahan semua hasil kali $i_1 i_2 i_3$ yang berbeda, di mana $i_1, i_2, i_3 \in \{1, 2, 3, 4\}$, seperti berikut:

- $i_1 i_2 i_3 t^2 = (2)(3)(4)t^2 = 24t^2$, dari skema: $\underset{\uparrow}{t}(\underset{\uparrow}{t}+1)(t+\underset{\uparrow}{2})(t+\underset{\uparrow}{3})(t+\underset{\uparrow}{4})$;
- $i_1 i_2 i_3 t^2 = (1)(3)(4)t^2 = 12t^2$, dari skema: $\underset{\uparrow}{t}(t+\underset{\uparrow}{1})(\underset{\uparrow}{t}+2)(t+\underset{\uparrow}{3})(t+\underset{\uparrow}{4})$;
- $i_1 i_2 i_3 t^2 = (1)(2)(4)t^2 = 8t^2$, dari skema: $\underset{\uparrow}{t}(t+\underset{\uparrow}{1})(\underset{\uparrow}{t}+\underset{\uparrow}{2})(t+3)(t+\underset{\uparrow}{4})$;
- $i_1 i_2 i_3 t^2 = (1)(2)(3)t^2 = 6t^2$, dari skema: $\underset{\uparrow}{t}(t+\underset{\uparrow}{1})(t+\underset{\uparrow}{2})(t+\underset{\uparrow}{3})(\underset{\uparrow}{t}+4)$.

Jadi $|s(5, 2)| = 24 + 12 + 8 + 6 = 50$ sehingga

$$t(t + 1)(t + 2)(t + 3)(t + 4) = \ldots + 50t^2 + \ldots .$$

**Akibat 1 Teorema 2.7**

*Bilangan Stirling jenis pertama* $s(n,k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n = 2, 3, \ldots,$ *nilainya adalah* $s(n,k) = (-1)^{n-k} \sum i_1 i_2 \ldots i_{n-k}$, *dimana indeks jumlahan adalah semua kemungkinan subhimpunan* $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\text{-}1\}$ *yang berbeda dan terdiri atas* $n - k$ *unsur-unsur*.

*Bukti*.

Sebab untuk setiap $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ berlaku $s(n, k) < 0$ jhj $n - k$ ganjil sehingga

$$s(n, k) = (-1)^{n-k}|s(n, k)|.$$

Setelah disubstitusi pada persamaan (**Error! Reference source not found.**), Akibat 1 ini terbukti. ■

**Akibat 2 Teorema 2.7** (Charalambides, 2002)

*Bilangan-bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda* $|s(n,k)|$ *dengan* $k = 1, 2, \ldots, n$ dan $n = 2, 3, \ldots,$ *memenuhi relasi rekurensi*

$$|s(n, k)| = |s(n-1, k-1)| + (n-1)|s(n-1, k)| \qquad (16)$$

*dengan nilai–nilai awal* $s(0,0) = 1 = s(1, 1)$ *dan* $s(1,0) = 0$.

*Bukti*.

Dalam pembuktian Teorema 2.7, koefisien $|s(n, k)|$ adalah koefisien untuk $t^k$ yang diperoleh dari hasil kali

$$t(t + 1)(t + 2)\ldots(t + n - 1) = \ldots + |s(n, k)|t^k + \ldots,$$

yaitu $|s(n, k)| = \sum i_1 i_2 \ldots i_{n-k}$ di mana indeks jumlahan sesuai isi Teorema 2.7.

Sedangkan dalam pembuktian Akibat 1 Teorema 2.7, koefisien $|s(n, k)|$ adalah koefisien untuk $t^k$ yang diperoleh dari hasil kali

$$t(t - 1)(t - 2)\ldots(t - n + 1) = \ldots + s(n, k)t^k + \ldots .$$

yaitu $s(n, k) = (-1)^{n-k}\sum i_1 i_2 \ldots i_{n-k}$ . Akibatnya, nilai $s(n-1, k-1)$ dan $(n-1)|s(n-1, k)$ di dalam relasi rekurensi (16) berbeda tanda (satu positif yang lain negatif), sebab indeks $k$ keduanya berselisih 1. Dengan kata lain, $s(n-1, k-1)$ dan $-(n-1)s(n-1, k)$ bertanda sama. Agar nilai mutlak dari

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) - (n-1)s(n-1, k)$$

sama dengan $|s(n, k)|$ sesuai Definisi 2.1, maka satu-satunya kemungkinan adalah

$$|s(n, k)| = |s(n-1, k-1)| + (n-1)|s(n-1, k)|.$$ ■

**Definisi 2.2**

*Bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda* $|s(n,k)|$ *adalah banyaknya permutasi n obyek yang dinyatakan sebagai hasil kali sebanyak k siklus-siklus yang saling lepas dan tidak kosong*.

Dalam definisi di atas, jelas $k \le n$.

**Teorema** 2**.8** (Charalambides, 2002)

*Kedua definisi bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda yang didefinisikan oleh Definisi* 2.1 (*sebagai nilai mutlak dari* $s(n, k)$) *dan yang didefinisikan oleh Definisi* 2.2 *adalah ekuivalen satu sama lain.*

*Bukti.*

Untuk membuktikan bahwa kedua Definisi 2.1 dan Definisi 2.2 ekuivalen satu sama lain, akan ditunjukkan bahwa keduanya memenuhi relasi rekurensi yang sama dengan nilai awal yang sama. Karena jelas keduanya memenuhi $|s(0, 0)| = 1$ dan untuk $n > 0$ berlaku $|s(n, 0)| = 0$ dan $|s(n, n)| = 1$, tinggal dibuktikan bahwa untuk setiap pasang bilangan asli $n > 0$ dan $k \ge 0$, relasi rekurensi (16)

$$|s(n, k)| = |s(n-1, k-1)| + (n-1)|s(n-1, k)|$$

di dalam Akibat 2 Teorema 2.7 juga bisa diturunkan melalui Definisi 2.2.

Ambil sembarang permutasi $s$ pada himpunan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Kemudian tetapkan $a \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dan permutasi $t$ pada himpunan $T = S - \{a\}$ sehingga $|T| = n - 1$. Berdasarkan Definisi 2.2, $s(n, k)$ adalah banyaknya cara yang berbeda untuk menuliskan permutasi $s$

sebagai perkalian $k$ siklus (termasuk siklus tunggal) yang saling lepas. Ada dua jenis permutasi berbentuk perkalian siklus yang bisa diperoleh, masing-masing diturunkan dari:

a. Permutasi-permutasi pada $S$ yang terdiri atas $n$ unsur dan $k$ siklus, salah satu siklus adalah ($a$). Jelas banyaknya permutasi sama dengan banyak permutasi $t$ pada $T$ yang terdiri atas $n - 1$ unsur dan $k$–1 siklus (siklus ($a$) di anggap tidak ada).
b. Permutasi-permutasi yang diperoleh dari permutasi pada $T$ yang terdiri atas $k$ siklus, tetapi hanya dari $n - 1$ unsur-unsur $T$. Permutasi pada $T$ ini kemudian diubah menjadi permutasi pada $S$ dengan menyisipkan $a$ ke sebelah kanan setiap unsur $T$. Sebelum disisipi $a$, banyak permutasi adalah $s(n - 1, k)$ karena ada $n - 1$ unsur $T$, ada $n - 1$ cara penyisipan yang menghasilkan $(n - 1)s(n - 1, k)$ permutasi berbeda yang diperoleh dengan cara ini.

Karena semua permutasi yang diperoleh dari cara $a$ dan $b$ berbeda satu sama lain maka banyak cara penyajian berbeda untuk permutasi $s$ pada $S$, yaitu $|s(n,k)|$, adalah banyak permutasi yang diperoleh dari cara $a$ ditambah banyak permutasi yang diperoleh dari cara $b$. Berdasarkan Definisi 2.2 banyaknya permutasi yang diperoleh dari cara $a$ adalah $|s(n - 1, k - 2)|$.

Cara $b$ diawali dengan memilih permutasi $q$ pada $S'$ di antara $k$ permutasi yang terbentuk dan memasukkan $a$ ke dalam $q$, baru kemudian dibentuk permutasi atas $k$ siklus yang salah satunya adalah siklus yang memuat $a$. Untuk setiap permutasi $q$, berdasarkan Definisi2.2, banyak permutasi yang diperoleh dari cara ini adalah $|s(n - 1, k - 1)|$. Tetapi karena ada $n - 1$ bilangan di dalam $S'$, total ada sebanyak $(n - 1)|s(n - 1, k - 1)|$ permutasi dalam bentuk perkalian siklus yang berbeda. Ini membuktikan rumus rekurensi di atas:

$$|s(n, k)| = |s(n - 1, k - 2)| + (n - 1)|s(n - 1, k - 1)|. \qquad \blacksquare$$

## 3. Barisan Eigen Untuk Bilangan Stirling Jenis Kedua

Determinan-$n$ (Janjić, 2012) adalah alat untuk menyajikan suatu relasi rekurensi dalam notasi matriks. Di sini pembicaraan dibatasi pada kasus $n = 1$. Persisnya, determinan-1 adalah determinan dari matriks berukuran $r \times r$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1,r-1} & p_{1,r} \\ -1 & & \cdots & p_{2,r-1} & p_{2,r} \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{r-1,r-1} & p_{r-1,r} \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & p_{r,r} \end{bmatrix}. \qquad (17)$$

Entri-entri $p_{21}$, $p_{32}$, ..., $p_{r,r-1}$ dari $\mathbf{P}$ semuannya bernilai $-1$, sedangkan untuk setiap indeks $s > t$, $p_{s+1,t} = 0$. Dengan nilai awal $a_1$, secara rekursif didefinisikan

$$a_2 = p_{11}a_1,$$
$$a_3 = p_{12}a_1 + p_{22}a_2,$$
$$\ldots$$
$$a_{r+1} = p_{1r}a_1 + p_{2r}a_2 + \ldots + p_{rr}a_r.$$

Lebih jauh, didefinisikan matriks baris berukuran $r \times (r + 1)$

$$\mathbf{B}_r = [a_1 a_2 \ \ \ldots \ \ a_r, a_{r+1}]$$

Janjić (2012) membuktikan bahwa

$$a_{r+1} = a_1 det(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{r} p_{i,r} a_i \qquad (18)$$

Diberikan barisan $(a_n)_{\geq 0}$. Transformasi Stirling adalah transformasi yang merubah barisan $(a_n)_{\geq 0}$ menjadi barisan $(b_n)_{\geq 0}$ sedemikian sehingga

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) a_k .$$

Menurut Bernstein dan Sloane (1995), terdapat suatu barisan $\{e_n\}_{n\geq 0}$ yang *invariant* terhadap transformasi Stirling, yaitu memenuhi relasi rekurensi

$$e_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) e_k \qquad (19)$$

untuk $n$ = 0, 1, 2, ... . Masalah yang muncul di sini adalah menentukan barisan $\{e_n\}_{n\geq 0}$ yang invariant tersebut (disebut **barisan eigen** untuk bilangan Stirling).
Karena persamaan (19) adalah bentuk khusus dari persamaan (18), maka dengan subsitusi barisan $\{e_n\}$ dan $\{S(n,k)\}$ pada relasi rekurensi (19) menggantikan barisan $\{a_n\}$ dan $\{p_{n,k}\}$ pada relasi rekurensi (18), nilai-nilai $e_n$ bisa diperoleh dengan substitusi determinan

$$e_n = \begin{vmatrix} S(0,0) & S(1,0) & S(2,0) & \cdots & S(n-2,0) & S(n-1,0) \\ -1 & S(1,1) & S(2,1) & \cdots & S(n-2,1) & S(n-1,1) \\ 0 & -1 & S(2,2) & \cdots & S(n-2,2) & S(n-1,2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S(n-2,n-2) & S(n-1,n-2) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & S(n-1,n-1) \end{vmatrix}$$

menggantikan determinan-1, yaitu *det*(**P**); pada relasi rekurensi (**Error! Reference source not found.**).

## *4.* Analogi antara Operator Diferensi dan Operator Turunan

**Definisi** 24**.3**
*Jika f adalah fungsi bernilai real dan x, h* $\in \mathfrak{R}$ *dengan h* $\neq 0$, *ekspresi*

$$\Delta_h f(x) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (20)$$

*disebut diferensi dari* $f$ *di* $x$ *dengan pertambahan* (*increment*) $h$ .

$\Delta_h f(x)$ disebut juga hasil bagi diferensi dari $f$ di $x$ dengan pertambahan $h$ .
Pembahasan diferensi yang terkait dengan faktorial turun (jadi terkait dengan factorial naik dan bilangan Stirling) bisa dilakukan pada kasus $h$ = 1. Dalam kasus ini, diferensi $\Delta_1$ cukup ditulis $\Delta$ sehingga (20) menjadi

$$\Delta f(x) := f(x+1) - f(x) \qquad (21)$$

Dalam Kalkulus, $Df(x)$; fungsi turunan pertama terhadap $f$ didefinisikan sebagai limit

$$Df(x) = \lim_{h\to 0} \Delta_h f(x),$$

(jika limit ini ada). Walaupun tidak berbentuk limit dan hanya pada kasus $h$ = 1, operator $\Delta$ memiliki beberapa sifat yang mirip sekali dengan sifat-sifat operator turunan $D$ :

*a.* $\Delta c = 0$ , untuk setiap fungsi konstant c
*b.* $\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x)$

*c.* $\Delta(f(x)+g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

*d.* $\Delta x^{\underline{n}} = nx^{\underline{n-1}}$

*e.* $\Delta\binom{x}{n} = \binom{x}{n-1}$

*f.* $\Delta 2^x = 2^x$ .

(Carl Wagner, Basic Combinatorics).

Karena hanya sifat *d* dan *e* yang terkait dengan generalisasi yang telah diuraikan sebelumnya, maka hanya kedua sifat ini yang akan dibuktikan. Bukti sifat *d* diperoleh dari (**Error! Reference source not found.**) dan (**Error! Reference source not found.**) melalui langkah-langkah berikut

$$\begin{aligned}\Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}}\\ &= (x+1)[x(x-1)\ldots(\underbrace{x+1-n+1}_{x-n+2})] - [x(x-1)\ldots(x-n+2)](x-n+1)\\ &= [(x+1)-(x-n+1)][x(x-1)\ldots(x-n+2)\\ &= n\,\Delta x^{\underline{n-1}}.\end{aligned}$$

Dari (**Error! Reference source not found.**) dan hasil terakhir ini serta sifat *b* diperoleh sifat *e* berikut:

$$\Delta\binom{x}{n} = \Delta\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} = \Delta\frac{x^{\underline{n}}}{n!} = \frac{1}{n!}\Delta x^{\underline{n}} = \frac{1}{n!}nx^{\underline{n-1}} = \frac{x^{\underline{n-1}}}{(n-1)!} = \binom{x}{n-1}.$$

Keterkaitan dengan bilangan Stirling diperoleh apabila faktorial turun pada salah satu ruas kesamaan dari sifat *d* dan *e* diganti ekspresi (6).

Konsep diferensi adalah analogi berbentuk diskrit dari konsep turunan yang kontinyu. Jadi penerapan konsep bilangan Stirling pada konsep diferensi juga bisa diterapkan pada bentuk diskrit turunan di dalam permusan deret Maclaurin. Berdasarkan rumus deret Maclaurin, setiap fungsi *f* yang terdiferensial tak hingga kali memiliki nilai fungsi di setiap titik *t* di sekitar (cukup dekat dengan) titik 0

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{k!}D^k f(t)\right]_{t=0} t^k \tag{22}$$

Jika rumus di atas diterapkan untuk kasus $f(t) = t^{\underline{n}}$ yang merupakan polinom derajat *n*, diperoleh

$$D^{(n+1)}(t^{\underline{n}}) = f^{(n+2)}(t^{\underline{n}}) = ... = 0.$$

(turunan dari fungsi faktorial turun yang berderajat > *n* selalu nol) sehingga dalam kasus ini, bentuk deret tak hingga dari (22) menjadi polinom

$$t^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}D^k t^{\underline{n}}\right]_{t=0} t^k$$

Dari persamaan $t^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k$ dan $t^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k!}D^k t^{\underline{n}}\right]_{t=0} t^k$ diperoleh

$$s(n,k) = \left[\frac{1}{k!}D^k t^{\underline{n}}\right]_{t=0}, \tag{23}$$

Demikian pula

$$|s(n,k)| = \left[ \frac{1}{k!} D^k (t+n-1)^{\underline{n}} \right]_{t=0}$$

$n = 0, 1, ...; k = 0, 1, 2, ...$ .

Untuk kasus diskrit, analogi dari rumus deret Maclaurin (22) untuk fungsi $f$ pada kasus kontinyu bisa diperoleh dengan menggunakan diferensi, yaitu

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{k!} \Delta^k f(t) \right]_{t=0} t^{\underline{k}} .$$

Karena untuk $k > n$ berlaku $\Delta^k t^n = 0$, maka

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} \left[ \frac{1}{k!} \Delta^k t^n \right]_{t=0} t^{\underline{n}}, \qquad n = 0,1,...$$

Dari persamaan

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) t^{\underline{k}} \qquad \text{dan} \qquad t^n = \sum_{k=0}^{n} \left[ \frac{1}{k!} \Delta^k t^n \right]_{t=0} t^{\underline{n}}, \qquad n = 0,1,...$$

diperoleh

$$S(n,k) = \left[ \frac{1}{k!} \Delta^k t^n \right]_{t=0} \tag{24}$$

$k = 0, 1, 2, ..., n$ dan $n = 0, 1, 2, ...$ .

## 5. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan pembahasan dan studi literatur terhadap konsep bilangan Stirling, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

A. Terdapat berbagai ekuivalensi, analogi atau perluasan konsep yang diturunkan dari konsep bilangan Stirling.

1. Ekuivalensi berbagai definisi bilangan Stirling. Pada khususnya, bilangan Stirling jenis pertama tak bertanda bisa ditafsirkan sebagai banyaknya permutasi pada {1, 2, ...,$n$} yang terdiri atas $k$ siklus, yaitu $|s(n, k)|$.
2. Hitung diferensi untuk perhitungan secara diskrit adalah analogi dari pencarian turunan fungsi kontinyu terdiferensial. Dengan bantuan notasi faktorial turun, bisa ditunjukkan banyak kasus di mana konsep diferensi untuk perhitungan secara diskrit adalah analogi dari konsep turunan fungsi kontinyu (terdiferensial).
3. Faktorial turun $x^{\underline{n}}$ adalah analogi dari bentuk pangkat $x^n$. Dengan analogi ini, konsep fungsi pembangkit faktorial dibangun untuk melengkapi konsep fungsi pembangkit biasa.
4. Faktorial turun $x^{\underline{n}}$ adalah generalisasi dari koefisien binomial $\binom{x}{n}$.

B. Berbagai konsep matematika memerlukan bilangan Stirling sebagai alat. Sebagai contoh, koefisien-koefisien dari deret Maclaurin untuk fungsi $f(t) = t^n$, ternyata adalah bilangan-bilangan Stirling. Sebaliknya bilangan Stirling memerlukan konsep matematika lain untuk mengembangkannya. Pada khususnya, konsep determinan-1 diperlukan sebagai alat untuk mendapatkan cara alternatif menurunkan barisan eigen untuk bilangan Stirling jenis kedua melalui relasi rekurensi $a_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} p_{i,r} a_i$ yang bisa bisa dihitung dengan menggunakan determinan-1.

*Untuk pengembangan konsep dan aplikasi bilangan Stirling, diberikan saran dan rekomendasi sebagai berikut:*

1. Diharapkan ada penelitian lanjutan yang lebih menekankan pada aspek aljabar dari barisan bilangan Stirling, di luar aspek kombinatoriks seperti yang ditekankan di dalam tulisan ini.
2. Perlu menggali lebih jauh berbagai kemungkinan keterkaitan konsep bilangan Stirling dengan konsep-konsep matematika yang lain, misalnya dengan mempelajari lebih lanjut konsep barisan eigen.
3. Karena bilangan-bilangan Stirling memberikan berbagai analogi dan generalisasi konsep-konsep matematika yang lain, perlu diteliti analogi dan generalisasi terhadap aplikasi yang sudah tercatat konsep-konsep matematika tersebut.
4. Dengan metoda berbeda dari metoda yang dibahas di sini, Stirling lebih dikenal karena berhasil menerapkan pendekatan nilai $n!$ yang digunakan dalam statistik dan teori peluang. Dengan demikian, diharapkan ada penelitian lain yang bisa menghubungkan metoda pendekatan nilai $n!$ tersebut dengan metoda penjabaran bilangan-bilangan Stirling jenis pertama dan kedua di dalam tulisan ini, walaupun sejauh ini tidak terlihat adanya hubungan kedua metoda.

## DAFTAR PUSTAKA

[1] M. Bernstein and N.J.A. Sloane (1995), “Some Canonical Sequences of Integers”, *Linear Algebra and its Applications*, Vol 226-228, pages 57-72

[2] Charalambides A. Charalambides (2002), “Enumerative Combinatorics”, CRC Press.

[3] Milan Janjić (2012), “Determinants and Recurrence Sequences”, *Journal of Integer Sequences*, Volume 15, Article 12.3.5

[4] Renzo Sprugnoli (2006), “An Introduction toMathematical Methods in Combinatorics”, diunduh dari www.dsi.unifi.it/~resp/Handbook.pdf pada tanggal 2 Maret 2010

[5] Carl Wagner, “Basic Combinatorics”, Diunduh dari www.math.utk.edu/~wagner/papers/comb.pdf pada tanggal 25 September 2012.