ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 9, No.2, 114-122, Januari 2013

Penerapan Teorema Bondy pada Penentuan Bilangan Ramsey Graf Bintang Terhadap Graf Roda

Hasmawati [1]

Abstrak

Graf yang memuat semua siklus dari yang terkecil sampai ke yang terbesar disebut pansiklis. Teorema Bondy menyebutkan bahwa jika G berorde *n* dan $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka G adalah pansiklis atau $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ untuk *n* genap. Selanjutnya, graf dengan siklus yang memuat semua titik dari graf tersebut disebut graf Hamilton. Dalam makalah ini akan ditunjukkan bahwa graf Hamilton yang dilengkapi dengan syarat tertentu juga memuat siklus dari yang terkecil sampai yang terbesar. Dalam tulisan ini disajikan pembuktian teorema Bondy dengan memanfaatkan sifat-sifat graf Hamilton. Bagian akhir penulisan diuraikan penerapan teorema Bondy dalam penentuan batas atas bilangan Ramsey untuk graf bintang terhadap graf roda.

Kata Kunci: Teorema Bondy, bilangan Ramsey, graf bintang, graf roda.

1. Pendahuluan

Teori Ramsey adalah suatu area penelitian dalam teori graf yang sedang berkembang pesat dan mempunyai banyak aplikasi, di antaranya pada teori bilangan, analisis harmonik, aljabar, geometri, komputasi, topologi, teori himpunan, logika, teori ergodik, teori informasi dan ilmu komputer (Makalah Pidato Ilmiah Baskoro, [1]). Meskipun tergolong area yang baru dalam bidang kombinatorik, khususnya dalam teori graf, namun teori ini telah mendapat perhatian dari banyak peneliti. Akibatnya kajian ini berkembang pesat dan telah memperoleh banyak hasil.

Kesulitan utama dalam menentukan bilangan Ramsey graf adalah sulitnya menemukan metode, teknik, atau teorema yang terkait dengan karakteristik suatu graf. Namun untuk graf siklus, teorema Bondy dapat dijadikan sebagai alternatif metode. Lebih jauh, graf roda adalah graf yang sub graf pembangunnya memuat siklus, Olehnya itu, metode atau teknik yang digunakan pada penentuan bilangan Ramsey untuk graf siklus, juga dapat digunakan pada penentuan bilangan Ramsey untuk graf roda.

Teorema Bondy adalah teorema yang menjamin keberadaan semua siklus dari yang terkecil sampai yang terbesar. Dengan demikian, torema Bondy mempunyai peranan yang penting dalam penentuan bilangan Ramsey, khususnya untuk graf yang memuat siklus [3]. Karenanya, pemahaman yang mendalam tentang teorema Bondy dengan cara menemukan alternatif pembuktiannya adalah juga penting. Dalam tulisan ini, sebelum menyajikan penerapan teorema Bondy terlebih dahulu menyajikan alternatif pembuktian teorema Bondy.

2. Beberapa Pengertian dan Notasi

Pada awal bagian ini diuraikan beberapa pengertian, istilah dan notasi dalam graf. Selain itu, juga diuraikan pengertian graf Hamilton dan sifat-sifatnya, graf pansiklik, dan beberapa jenis graf khusus seperti graf lengkap, lintasan, siklus, graf bintang, graf pohon dan graf roda. Bagian selanjutnya membahas tentang beberapa batas atas bilangan Ramsey

[1] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin*

yang telah diperoleh sebelumnya. Untuk kepentingan pengertian graf didefinisikan $[V]^2 = \{Y : Y \subseteq V, |Y|=2)$

Graf $G(V,E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan berhingga tak kosong $V = V(G)$ dan himpunan $E = E(G)$ dengan $E \subseteq [V]^2$. Himpunan V disebut himpunan titik dari G dan himpunan E disebut himpunan sisi dari G. Setiap u dan v di $V(G)$ disebut titik dan setiap $e = \{u,v\}$ di $E(G)$ disebut sisi. Selanjutnya, sisi $e = \{u,v\}$ hanya ditulis uv. Titik u disebut tetangga (*neighbor*) dari titik v jika $e = uv$. Lebih lanjut, titik u dan v dikatakan titik-titik bertetangga (*adjacent*), sedangkan sisi e dikatakan terkait (*incident*) dengan titik u dan v. Dua sisi e_1 dan e_2 pada G disebut sisi-sisi bertetangga jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama. Sisi e_1 dan e_2 dikatakan saling bebas jika e_1 dan e_2 tidak bertetangga. Secara serupa, dua titik pada G dikatakan saling bebas jika kedua titik tersebut tidak bertetangga.

Graf F disebut komplemen dari graf G, jika $V(F) = V(G)$ dan $uv \in E(F)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$. Komplemen dari graf G dinotasikan dengan $\bar{G}$. Dua graf G dan H disebut isomorfik jika terdapat pemetaan satu-satu dan pada $\emptyset : V(G) \to V(H)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in V(G)$ berlaku $xy \in E(G)$ jika dan hanya jika $\emptyset(x)\emptyset(y) \in E(H)$.

Kardinalitas himpunan S dinotasikan dengan $|S|$, adalah banyaknya anggota dari S. Orde graf G adalah $|V(G)|$ dan ukuran graf G adalah $|E(G)|$. Graf G berorde m dinotasikan dengan G_m. Graf G_n dikatakan graf lengkap, dinotasikan dengan K_n jika setiap dua titik pada G_n bertetangga. Misalkan v_i adalah sebarang titik pada G dan $S \subseteq V(G)$. Didefinisikan

$$N_s(v_i) = \{w \in S: wv_i \in E(G)\} \text{ dan } N_s[v_i] = N_s(v_i) \cup \{v_i\},$$

$$Z_s(v_1, v_2, \dots, v_n) = N_s(v_1) \cap N_s(v_2) \cap \dots \cap N_s(v_n),$$

dan

$$O_s(v_1, v_2, \dots, v_n) = N_s(v_1) \cup N_s(v_2) \cup \dots \cup N_s(v_n).$$

Derajat titik v_i pada graf G, dinotasikan dengan $d_G(v_i)$, adalah $|N_G(v_i)|$. Derajat maksimum dari G adalah $\Delta G = maks\{d_G(v_i): v_i \in V(G)\}$, dan derajat minimum dari G adalah $\delta(G) = \min\{d_G(v_i): v_i \in V(G)\}$. Graf G disebut graf *r-reguler* jika $\Delta G = \delta(G) = r$.

Teorema 1.
Misalkan G adalah sebarang graf berorde n dan berukuran q. Jika $V(G) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, maka

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2q$$

Akibat 1. (Lema Handshaking)
Banyaknya titik yang berderajat ganjil pada suatu graf adalah genap

Bukti Teorema 1 dan Akibat 1 dapat dilihat pada rujukan Chartrand dan Lesniak [2].

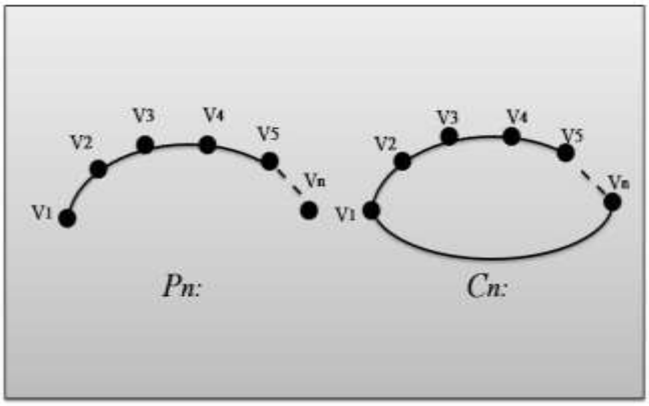
Misalkan u dan v adalah dua titik pada graf G yang tidak bertetangga. Graf $G + \{uv\}$ adalah suatu graf baru dengan himpunan titik $V(G + uv) = V(G)$ dan himpunan sisi $E(G + uv) = E(G) \cup \{uv\}$. Graf $H(V', E')$ disebut sub graf dari G jika

$V' \subseteq V(G)$ dan $E' \subset E(G)$. Selanjutnya, sub graf H dari G ditulis $H \subseteq G$. Sub graf H dikatakan sub graf maksimal dari G jika H memuat semua sisi $xy \in E(G)$ untuk semua $x, y \in V'$. Untuk sebarang himpunan $S \subset V(G)$, sub graf terinduksi oleh S dari G adalah sub graf maksimal dari G dengan himpunan titik S dan dinotasikan dengan $G[S]$. Sub graf $G[V(G)\backslash V(H)]$ dinotasikan dengan $G\backslash H$.

Misalkan $G(V,E)$ adalah sebarang graf. Misalkan pula $A \subset V$ dan $B \subset E$. Didefinisikan $V\backslash A = \{u \in V: u \notin A\}$ dan $E\backslash B = \{e \in E: e \notin B\}$. Graf $G - A$ adalah suatu sub graf dari G dengan $V(G - A) = V\backslash A$ dan $E(G - A) = E \backslash \{xy: x \in A \; atau \; y \in A\}$. Graf $G - B$ adalah suatu subgraf dari G dengan $V(G - B) = V$ dan $E(G - B) = E\backslash B$. Khususnya untuk $A = \{x\}$ dan $B = \{e\}$ dengan $e = xy$, subgraf $G - B$ ditulis $G - e$ dan sub graf $G - A$ ditulis $G - x$.

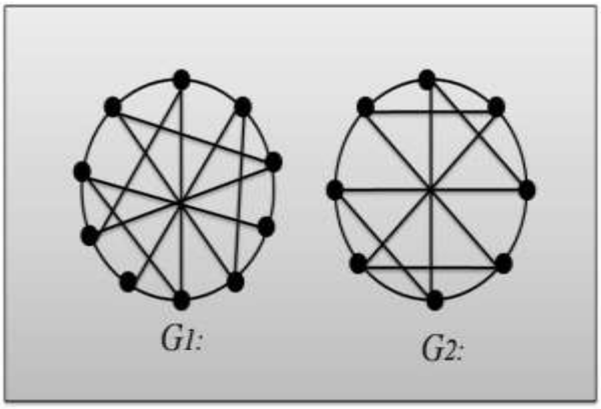
Lintasan (*path*) P dengan $n \geq 1$ titik adalah graf yang titik-titiknya dapat diurutkan dalam suatu barisan $u_1, u_2, \dots, u_n$ sedemikian sehingga $E(P) = \{u_i u_{i+1}: i = 1, \dots, n-1\}$. Graf G dikatakan terhubung jika untuk setiap dua titik u dan v pada graf tersebut terdapat suatu lintasan yang memuat u dan v.

Jika $P_n := v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah suatu lintasan berorde n dan $n \geq 3$, maka graf $C_n := P_n + \{v_1 v_n\}$ disebut *siklus* berorde n (Lihat Gambar 1). Panjang P_n adalah $n - 1$, yaitu banyaknya sisi pada P_n dan panjang siklus C_n adalah n.



Gambar 1 (a) Lintasan P_n dan (b) Siklus C_n

Panjang siklus terbesar pada suatu graf G dinotasikan dengan $c(G)$, sedangkan panjang siklus terkecil dinotasikan dengan $g(G)$. Graf G dengan orde n disebut pansiklis (*pancyclic*) jika G memuat semua siklus C_l dengan $3 \leq l \leq n$, dan disebut pansiklis lemah (*weakly pancyclic*) jika G memuat siklus C_h untuk $g(G) \leq h \leq c(G)$. Graf G_1 pada Gambar 2 adalah pansiklis lemah dengan $g(G) = 4$ dan G_2 adalah pansiklis karena memuat semua siklus C_l untuk $3 \leq l \leq 8$.

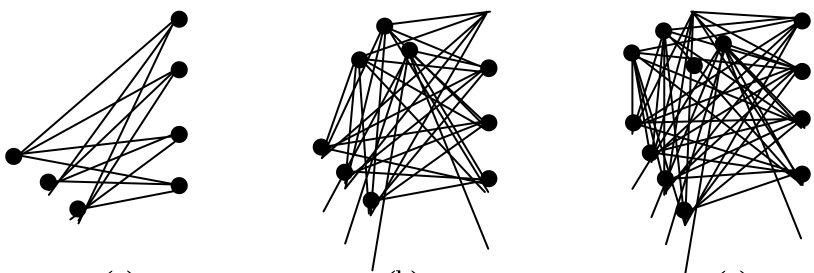


Gambar 2. Graf G_1 adalah Graf Pansiklik dan G2 adalah Pansiklik Lemah

Graf pohon T_n adalah graf terhubung berorde n dan tidak memuat siklus. Bintang S_n adalah pohon dengan $V(S_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ dan $E(S_n) = \{v_1 v_{i+1} : i = 1, 2, ..., n - 1\}$. Titik v_1 disebut *pusat* dari S_n. Roda W_k adalah suatu graf yang dibentuk dari siklus C_k dengan menambahkan satu titik, sebut x, dan menambahkan k sisi dari titik x ke semua titik di C_k. Dalam hal ini, titik x disebut poros (*hub*) roda dan siklus C_k disebut rim roda.

Misalkan $V_1, V_2, ..., V_k$ adalah beberapa himpunan bagian dari himpunan titik $V(G)$ pada suatu graf G. Untuk setiap i, himpunan V_i disebut $partisi$ dari $V(G)$ jika $V_i \neq \emptyset$, dan $V(G) = U_{i=1}^{k} V_i$ serta $V_i \cap V_j = \emptyset$ dengan $i \neq j$. Graf G disebut graf $k\text{-}partit$ jika $V(G)$dapat dipartisi ke dalam k partisi himpunan bebas $V_1, V_2, ..., V_k$. Graf $k - patit$ untuk $k \geq 2$ dengan $|V_i| = n_i$ disebut graf multipartit, dinotasikan dengan $B_{n1,n2,...,nk}$. Khusus untuk $B_{n1,n2}$, grafnya disebut graf bipartit. Graf multipartit $B_{n1,n2,...,nk}$ disebut graf multipartit lengkap jika setiap titik disetiap partisi bertetangga dengan semua titik dipartisi-partisi lainnya. Graf multiparti lengkap dinotasikan dengan $K_{n1,n2,...,nk}$.

Menurut pengertian ini, bintang S_n merupakan graf bipartit lengkap dengan notasi $K_{1,n-1}$. Graf $K_{n1,n2,...,nk}$ disebut graf multipertit lengkap seimbang dinotasikan dengan $K_{k \times t}$, jika $|V_i| = t$ untuk setiap i. Pada Gambar 3: gambar (a) adalah graf multipartit $B_{3,3,4}$, gambar (b) adalah graf multipartit lengkap $K_{3,3,4}$, dan gambar (c) adalah graf multipartit lengkap seimbang $K_{3,3,4}$.



(a) (b) (c)

Gambar 2.3. (a) Graf Bipartit Lengkap $K_{3,4}$ dan (b), (c) Graf Multipartit .

Teorema 2.

Jika G adalah graf berorde n dan berukuran $n^2/_4$ *maka G memuat sebuah siklus ganjil atau* $G = K_{n/_2, n/_2}$.

2.1. Graf Hamilton

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa siklus adalah lintasan yang kedua ujungnya dikaitkan oleh suatu sisi. Pada bagian ini disajikan pengertian graf Hamilton dan sifat-sifatnya. Siklus Hamiltonian (*Hamiltonian Cycle*) merupakan siklus pada graf *G* yang memuat setiap titik di *G*. Graf yang memuat siklus Hamiltonian disebut graf Hamilton. Selanjutnya, graf Hamilton yang memiliki sifat-sifat tertentu memuat semua siklus dari yang terkecil sampai ke yang terbesar. Pada tulisan selanjutnya diuraikan pembuktian teorema Bondy dengan menggunakan konsep graf Hamilton dengan beberapa tambahan sifat tertentu.

Belum ada suatu teorema atau lemma yang memberikan karakteristik yang cukup untuk graf Hamilton. Namun berikut ini disajikan teorema tentang karakteristik graf Hamilton, walaupun masih banyak graf Hamilton yang tidak terakomodir pada teorema-teorema tersebut.

Teorema 3.
Misalkan G adalah sebarang graf sederhana berorde n . Jika $deg(u) + deg(v) \geq n, \ \forall u, v \in V(G)$, *maka G adalah graf Hamilton.*

Graf siklus dan roda merupakan graf Hamilton, meskipun tidak memenuhi syarat Teorema 3. Di sini ditekankan bahwa jika jumlah derajat setiap dua titik pada suatu graf sama atau lebih dari ordenya, maka graf tersebut pasti Hamilton.

Penelitian ini bertujuan untuk menemukan metode alternatif pembuktian teorema Bondy. Pada penelitian ini dikaji graf Hamilton dan sifat-sifatnya. Siklus Hamiltonian (*Hamiltonian Cycle*) merupakan siklus dalam graf *G* yang memuat setiap titik di *G*. Graf yang memuat siklus Hamiltonian disebut graf Hamilton. Selanjutnya, graf Hamilton yang memiliki sifat tertentu memuat semua siklus dari yang terkecil sampai ke yang terbesar. Dengan demikian graf Hamilton dengan beberapa tambahan sifat-sifat dapat digunakan untuk membuktikan teorema Bondy.

2.2. Bilangan Ramsey

Teori Ramsey pertama dipelajari dalam konteks problem penentuan prosedur regular untuk memeriksa konsistensi dari suatu formula logika yang diberikan. Kemudian, teori ini menjadi terkenal setelah Paul Erdos dan George Szekeres (1935) mengaplikasikannya ke dalam teori graf yang menghasilkan teorema tentang bilangan Ramsey graf. Selanjutnya, melalui teorema tersebut konsep bilangan Ramsey graf dua warna dinyatakan dalam teorema berikut

Definisi 1.
Untuk sembarang dua bilangan asli n_1 *dan* n_2*, bilangan Ramsey* $R(n_1, n_2)$ *adalah bilangan bulat terkecil m sedemikian sehingga untuk setiap graf F berorde m memenuhi sifat berikut: F memuat graf* K_{n_1} *atau* $\bar{F}$ *memuat* K_{n_2}.

Bilangan M_o disebut bilangan Ramsey klasik dua warna yang selanjutnya disebut bilangan Ramsey klasik, dan dinotasikan dengan $R(n_1, n_2)$ atau $R(K_{n_1}, K_{n_2})$. Pengertian bilangan Ramsey klasik $R(n_1, n_2)$ dapat dinyatakan sebagai berikut. Karena setiap graf *F* memenuhi $\bar{\bar{F}} = F$, $R(n_1, n_2)$ pada Definisi 1 bersifat simetri yaitu $R(n_1, n_2) = R(n_2, n_1)$, lihat [6].

Definisi 1 dapat diperumum menjadi definisi bilangan Ramsey graf. Dalam hal ini,graf tidak terbatas pada graf lengkap tetapi diperumum menjadi sembarang graf. Definisi bilangan Ramsey graf seperti berikut.

Definisi 2.
Diberikan graf G dan H, bilangan Ramsey graf R(G,H) adalah bilangan asli terkecil m sedemikian sehingga sembarang graf F berorde m selalu memuat graf G sebagi subgraf atau komplemen F memuat graf H sebagai subgraf.

Penyajian berikut ini adalah beberapa survei tentang batas atas bilangan Ramsey klasik dan bilangan Ramsey graf. Surahmat dalam disertasinya pada tahun 2003 [7], menyajikan bukti eksistensi bilangan Ramsey klasik $R(n_1, n_2)$ dengan menunjukkan batas atas dan batas bawahnya. Batas atas $R(n_1, n_2)$ adalah untuk setiap bilangan asli n_1 dan n_2, $R(n_1, n_2)$ senantiasa ada dan memenuhi

$$R(n_1, n_2) \leq \binom{n_1 + n_2 - 2}{n_1 - 1}. \quad (1)$$

Pada tahun 2005, Hasmawati dkk. [4] menunjukkan bahwa $R(S_n, W_m) \leq 3n - 2$ untuk $n \geq 3$ dan m ganjil, $m \leq 2n-1$. Dua tahun setelah itu, Hasmawati dkk. [5] memberikan batas atas bilangan Ramsey untuk k-copy bintang terhadap roda yakni $R(kG,H) \leq R(G,H) + (k-1)|V(G)|$. Selanjutnya, Ahsan dalam tesisnya pada tahun 2010 menunjukkan bahwa $R(S_n, W_8) \leq 5(n-1)/2$, untuk $n \geq 11$, $n \cong 3 \pmod 4$.

Dengan memperhatikan ketidaksamaan pada (1) dapat diketahui bahwa setiap bilangan Ramsey untuk dua pasang graf selalu memiliki batas atas. Namun yang penting dalam penentuan bilangan Ramsey yang eksak adalah batas atas terkecil. Salah satu metode yang banyak digunakan oleh para peneliti teori graf dalam menentukan batas atas bilangan Ramsey khususnya untuk graf roda atau graf siklus adalah Teorema Bondy.

1. Teorema Bondy dan Penerapannya

Teorema Bondy adalah teorema yang menjamin keberadaan semua siklus pada suatu graf tertentu dan ditemukan oleh Bondy pada tahun 1971. Terema tersebut menyebutkan bahwa jika terdapat suatu graf yang derajat terkecilnya adalah setengah dari ordernya maka graf tersebut memuat semua siklus dari yang terkecil sampai yang terbesar. Melalui pengertian graf roda, diketahui bahwa siklus adalah sub graf pembangun graf roda. Karena itu, untuk mengetahui keberadaan roda pada suatu graf juga dapat menggunakan teorema Bondy. Lebih jauh dalam penetuan batas atas bilangan Ramsey untuk graf bintang terhadap graf roda atau graf siklus digunakan teorema Bondy sebagai alternatif metode.

3.1 Teorema Bondy

Graf yang memuat semua siklus disebut pansiklis. Sedangkan karakteristik graf pansiklik diberikan oleh Teorema Bondy.

Teorema 4. (Bondy, 1971).
Misalkan G adalah graf berorde n. Jika $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, *maka G adalah pansiklis atau* $G = K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ *untuk n genap.*

Bukti.
Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa jika G adalah graf berorde n dimana $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, maka n genap dan $G = K_{n/2, n/2}$.

Misalkan G adalah graf berorde n dengan $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$. Maka $\forall\, u, v \in V(G)$, akan diperoleh

$$\deg(u) + \deg(v) \geq \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \tag{2}$$

Berdasarkan Teorema 3 graf G merupakan graf Hamilton. Menurut Teorema 2, ukuran dari suatu graf atau banyaknya sisi pada suatu graf yang dinotasikan dengan q adalah

$$2q = \sum_{i=1}^{n} \deg v_i \geq \sum_{i=1}^{n} \delta(G) = n.\frac{n}{2}$$

$$\geq \frac{n^2}{2} \quad \text{atau} \quad q \geq \frac{n^2}{4}.$$

Dengan demikian diperoleh graf Hamilton (n, q), dengan $q \geq {n^2}/{4}$. Misalkan

$C: v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ adalah siklus Hamilton dari G yang tidak memuat $(n-1)$-siklus dengan $n \geq 4$ dan misalkan pula v_j dan v_{j+1} adalah dua titik yang berurutan dari C (dalam hal ini semua *subscripts* dinyatakan sebagai modulo *n*). Jika $1 \leq k \leq n$ dan $k \neq j-1$ dan $k \neq j$, maka paling banyak satu dari $v_j v_k$ dan $v_{j+1} v_{k+2}$ adalah sebuah sisi dari *G*. Karenanya setiap titik berderajat $\deg v_j - 1$ dalam $V(G) - \{v_{j-1}, v_j\}$ yang bertetangga dengan v_j, terdapat sebuah titik pada $V(G) - \{v_{j+1}, v_{j+2}\}$ yang tidak bertetangga dengan v_{j+1} . Dan juga

$$\deg v_{j+1} \leq (n-2) - (\deg v_j - 1) + 1.$$
$$\deg v_{j+1} \leq \left(\textstyle\sum_{v \in V(T)} (\deg v - 1)\right) - (\deg v_j - 1) + 1$$
$$\deg v_{j+1} \leq \left(\textstyle\sum (\deg v_j - 1)\right) - (\deg v_j - 1) + 1$$
$$\deg v_{j+1} \leq (n-2) - (\deg v_j - 1) + 1$$
$$\deg v_{j+1} \leq n - 2 - \deg v_j + 1 + 1$$
$$\deg v_{j+1} \leq n - \deg v_j$$
$$\deg v_j + \deg v_{j+1} \leq n \ , \ \forall\, j \tag{3}$$

Andaikan n adalah bilangan ganjil. Maka dengan menggunakan persamaan (3) terdapat beberapa titik, yang misalkan v_n, sedemikian sehingga $\deg v_n \leq (n-1)/2$.
Akibatnya $2q = \sum_{i=1}^{n-1} \deg v_i + \deg v_n \leq \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)}{2} < \frac{n^2}{2}$, hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa $q \geq {n^2}/{4}$. Jadi *n* mestilah bilangan genap.

Jika n adalah bilangan genap dan menurut persamaan (3), $2q \leq {n^2}/{2}$), maka $q \leq {n^2}/{4}$.

KarenA $q \geq {n^2}/{4}$ dan dari persamaan (3), $q \leq {n^2}/{4}$, maka berlaku $q = {n^2}/{4}$. Jika

persamaan (3) berlaku untuk setiap j, berlaku $v_j v_k \in E(G)$ jika dan hanya jika

$$v_{j+1} v_{k+2} \notin E(G) \text{ dan } k \neq j-1, j. \tag{4}$$

Andaikan $G \neq K_{n/2, n/2}$. Jika G berukuran $n^2/4$ dan dengan menggunakan Teorema 1, maka G mempunyai sebuah siklus ganjil. Ini menunjukkan bahwa G memuat sebuah siklus sebelah luar terbesar dengan panjang yang ganjil.

Misalkan $v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+l}, v_j$ adalah siklus sebelah luar yang terpendek dengan panjang ganjil $\ell + 1$ maka ℓ adalah genap dan $4 < l \leq n-4$ (G tidak memuat $(n-1)$-siklus). Oleh karena berlaku $v_j v_{j+\ell} \in E(G)$, maka dengan persamaan (4), $v_{j-1}v_{j+\ell-2} \notin E(G)$. Dan begitu pula dengan menggunakan persamaan (4), diperoleh $v_{j-2}v_{j+\ell-4} \in E(G)$. Olehnya itu $v_{j-2}, v_{j-1}, \dots, v_{j+\ell-4}, v_{j-2}$ adalah sebuah siklus bagian luar dengan panjang ganjil $\ell - 1$. Hal ini kontradiksi dengan panjang siklus terpendek pada G yaitu $\ell - 1$. Jadi mestilah $G = K_{n/2, n/2}$.

Kemudian akan ditunjukkan dengan induksi pada n, bahwa jika G adalah sebuah graf Hamilton (n, q), dengan $q \geq n^2/4$, maka G pansiklis atau $G = K_{n/2, n/2}$ untuk n genap.

Jika $n = 3$, maka $G = C_3$ dan G pansiklis. Diasumsikan bahwa untuk semua graf Hamilton H berorder $n - 1 (\geq 3)$ dengan sisi paling sedikit $(n-1)^2/4$ maka H pansiklis atau $H = K_{(n-1)/2, (n-1)/2}$ untuk $n - 1$ bernilai genap.

Misalkan G sebuah graf Hamilton (n, q) dengan $q \geq n^2/2$. Diasumsikan bahwa:

(i) n genap dan $G \neq K_{n/2, n/2}$ atau (ii) n ganjil. Akan ditunjukkan bahwa G pansiklis.
Asumsi ini merupakan lanjutan dari bagian pertama pembuktian dimana $G \neq K_{n/2, n/2}$ dengan n genap dan G memuat

$$v_{j+1}, v_{j+2}, \dots, v_k, v_j, v_{j-1}, v_{j-2}, \dots, v_{k+2}, v_{j+1} \tag{5}$$

yang merupakan sebuah $(n-1)$-siklus dari G. Dalam hal ini, G memuat sebuah siklus $(n-1)$ yaitu $C^*: w_1, w_2, \dots, w_{n-1}, w_1$. Misalkan w adalah titik yang tunggal dari G yang tidak terdapat di C^*. Jika deg$w \geq n/2$, maka untuk setiap bilangan ℓ memenuhi $3 \leq \ell \leq n$, sehingga verteks w terletak pada sebuah ($\ell - 1$)-siklus dari *G*;
Sebaliknya, jika $ww_i \in E(G)$ dengan $1 \leq i \leq n-1$, maka $ww_t \notin E(G)$, dimana $t \equiv i + \ell - 2 (\text{mod } n-1)$. w tidak terletak pada setiap siklus atau terdapat siklus C_l yang tidak memuat w. Hal ini menunjukkan bahwa deg$w \leq (n-1)/2$, yang mana kontradiksi dengan deg$w \geq n/2$. Jadi G adalah pansiklis jika deg$w \geq n/2$.
Jika deg$w < n/2$, maka $G - w$ adalah graf Hamilton berorder $n - 1$ dengan paling sedikit memiliki $n^2/4 - (n-1)/2$ sisi . $(n-1)/2$ adalah sisi yang terkait dengan titik w. Oleh karena $n^2/4 - (n-1)/2 > (n-1)^2/4$ dan sesuai asumsi bahwa $G - w \neq K_{(n-1)/2, (n-1)/2}$ maka dengan menggunakan hipotesis induksi maka disimpulkan bahwa $G - w$ adalah pansiklis. Jadi terbukti G adalah pansiklis. ∎

3.2 Penerapan Teorema Bondy

Pada bagian ini akan diperlihatkan penggunaan teorema Bondy dalam penentuan batas atas bilangan Ramsey untuk graf bintang terhadap graf roda dengan orde graf bintang lebih besar dari orde graf roda. Kita akan menunjukkan bahwa 41 adalah salah satu batas atas bilangan Ramsey untuk graf bintang berorde 15 terhadap graf roda berorde 8 atau $R(S_{15},W_8) \leq 41$.

Ambil sembarang graf F dengan $|F| = 41$. Misalkan F tidak memuat S_{15}, akan ditunjukkan bahwa komplemen F memuat W_8. Karena F tidak memuat S_{15}, berarti untuk setiap titik v di F, $d_F(v) \leq 13$. Mengingat orde F adalah ganjil dan menurut Akibat 1 (Lema Handshaking), terdapat paling sedikit satu titik $u_0 \in F$ berderajat genap. Dengan tidak mengurangi perumuman pembuktian dimisalkan $d(u_0) = 12$. Tulis $A = V(F)\backslash N[u_0]$ dan $T = F[A]$. Dapat diketahui bahwa $|T| \geq 37 - |N[u_0]| = 41 - 13 = 28$. Karena $d_F(v) \leq 13$ untuk setiap titik v di F dan T adalah sub graf dari F, maka $d_T(v) \leq 13$ untuk setiap titik di T. Berarti untuk setiap titik v di komplemen T berderajat $d(v) \geq$ 28-14=14 $\geq |T| / 2$. Menurut teorema Bondy komplemen T merupakan graf pansiklik. Berarti Komplemen T memuat siklus berorde 8 (C_8). Siklus C_8 bersama-sama dengan titik v_0 membentuk graf roda W_8 di komplemen F. Hal ini membuktikan bahwa sembarang graf berorde 41 pasti memuat S_{15} atau komplemennya memuat W_8. Menurut definisi bilangan Ramsey $R(S_{15},W_8) \leq 41$ atau 41 adalah batas atas bilangan Ramsey untuk graf bintang S_{15} terhadap graf roda W_8.

Daftar Pustaka

[1] Baskoro E.T., 2007. *Makalah Pidato Ilmiah pada pengukuhan Guru Besar ITB.*

[2] Chartrand G. dan Lesniak L., 1996. *Graph and Digraph, 3rd Edition*. Chapman and Hall.

[3] Hasmawati, 2007. Bilangan Ramsey untuk Graf yang Memuat Bintang. *Disertasi*. Program Pascasarjana Matematika ITB.

[4] Hasmawati dkk., 2005. Star-Wheel Ramsey Numbers. *The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, pp.123-128.

[5] Hasmawati dkk., 2008, The Ramsey Numbers for Disjoint Unions of Graphs. *Discrete Mathematics*, 308, pp.2046-2049.

[6] Radziszowski S.P., 2004. Small Ramsey Numbers. *The Electronic Journal of Combinatorics*, #DS1.9, http://www.combinatorics.org/.

[7] Surahmat, 2003. Bilangan Ramsey untuk Graf Roda. *Disertasi*. Departemen Matematika ITB Indonesia.