ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 8, No.2, 64-68, Januari 2012

Pembentukan Ideal Prim Gelanggang Polinom Miring Atas Daerah $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

Amir Kamal Amir *

Abstrak

Misalkan *R* adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu endomorfisma dari *R*, dan δ adalah suatu σ- derivatif. Gelanggang polinom miring, disimbol dengan $R[x;\sigma,\delta]$, dalam peubah tak diketahui *x*, adalah gelanggang yang terdiri dari polinom seperti $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_0$ yang memenuhi aturan perkalian: $xa=\sigma(a)x+\delta(a), \forall a\in R$. Dalam paper ini akan di konstruksi satu gelanggang polinom miring dengan mengambil $R=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Pada bagian akhir dari paper ini akan diuraikan bentuk ideal maksimal dan $(\sigma,\delta)-$ideal dari gelanggang polinom miring tersebut.

Kata Kunci: Ideal, bilangan bulat, maksimal, polinom.

Abstract

Let *R* be any ring with identity *1*, σ be an endomorphism of *R* and δ be a left σ-derivation. The skew polynomial ring over *R* in an indeterminate *x*, denoted by $R[x;\sigma,\delta]$, is the set of polynomials $a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ where $a_i\in R$ with multiplication rule $xa=\sigma(a)x+\delta(a)$ for all $a\in R$. In this paper will be constructed a skew polynomial ring where $R=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. At the end of this paper will be showed a maximal ideal and $(\sigma,\delta)-$ideal of that skew polynomial ring.

Keywords: Ideal, integer, maximal, polynomial.

1. Pendahuluan

Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom dengan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif. Dalam teori sistem kontrol, gelanggang polinom miring digunakan untuk mentransfer sistem kontrol klasik ke dalam sistem kontrol linier abstrak (aljabar). Selanjutnya pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier diterjemahkan menjadi pengkajian struktur, sifat, dan kelakuan sistem linier abstrak terkait, misalnya dengan memanfaatkan pengetahuan aljabar. Dengan demikian, pengkajian sifat-sifat dan kelakuan sistem kontrol linier, yang banyak digunakan dalam dunia aplikasi akan sangat terbantu jika diketahui dengan baik sifat-sifat dan struktur gelanggang polinom miring tersebut.

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10, email: amirkamalamir@yahoo.com.*

Pengkajian tentang struktur gelanggang polinom miring, yang dinotasikan dengan $R[x,\sigma,\delta]$, untuk kasus gelanggang tumpuan *R* berupa daerah Dedekind sudah dilakukan.

Secara lengkap pengertian gelanggang polinom miring disajikan pada [2] dan [3]. Misalkan *R* suatu gelanggang, σ suatu endomorfisma di *R*, dan δ suatu σ -derivatif, yaitu:

1. δ suatu endomorfisma grup di *R*.
2. $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$ untuk setiap $a,b\in R.$

Gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ dalam variabel tak diketahui *x* berisi semua polinom dengan koefisien di *R* yang memenuhi aturan perkalian sebagai berikut: untuk setiap $a\in R$ berlaku $xa=\sigma(a)x+\delta(a).$

Memperhatikan definisi dari gelanggang polinom miring dapat disimpulkan bahwa gelanggang polinom miring mengandung tiga unsur, yaitu gelanggang biasa, disimbol dengan *R* (biasa juga disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring tersebut), σ suatu endomorfisma di *R*, dan δ suatu σ -derivatif. Ketiga unsur tersebut bersama-sama memenuhi syarat-syarat gelanggang polinom miring. Dalam tulisan ini akan dikonstruksi gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan $R=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Dengan adanya σ dan δ , maka struktur dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ akan berbeda dengan struktur dari gelanggang tumpuannya. Oleh karena itu, bentuk ideal dari $R[x;\sigma,\delta]$ juga akan berbeda dengan bentuk ideal dari gelanggang tumpuannya. Lebih lanjut, Dengan adanya σ dan δ , maka dalam gelanggang polinom miring dikenal istilah σ -ideal, δ -ideal dan $(\sigma,\delta)-$ideal. Pada baigan akhir tulisan ini akan dipaparkan bentuk ideal prim dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ yang akan dikonstruksi dari $(\sigma,\delta)-$ideal dari gelanggang tumpuannya, yaitu *R*.

2. Pembentukan Gelanggang Polinom Miring

Dalam bagian ini akan dikonstruksi gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ untuk $R=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat.

Lemma 1.
Misalkan $\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}$ *dengan* $\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, *untuk setiap* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\in\boldsymbol{R}$, *maka* $\boldsymbol{\sigma}$ *adalah suatu automorfisma dari* $\boldsymbol{R}$.

Bukti:

1. $\boldsymbol{\sigma}$ memenuhi syarat jumlah

   Misalkan $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ dan $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, maka
   $$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

   Dengan demikian dapat dengan mudah dilihat bahwa:
   $$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})+\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}).$$

2. $\boldsymbol{\sigma}$ memenuhi syarat perkalian

   Misalkan *u* dan *v* seperti pada Bagian 1, maka dengan kalkulasi sederhana diperoleh:

   $$\boldsymbol{uv} = (\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd})\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

   Dengan demikian,

   $$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{uv}) &= \boldsymbol{\sigma}\left[(\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd})\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\ &= (\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd} + \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd})\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

   Pada sisi lain dapat dengan mudah dilihat bahwa:

   $$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v}) &= \left[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}) - \boldsymbol{d}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right] \\ &= (\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd} + \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd})\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

   Jadi diperoleh $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{v})$. ■

Lemma 2.

Misalkan $\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *seperti pada Lemma 1 diatas dan* $\boldsymbol{\delta} : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *dengan* $\boldsymbol{\delta}\left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right) = \boldsymbol{b}$, *untuk setiap* $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in \boldsymbol{R}$, *maka* $\boldsymbol{\delta}$ *adalah suatu* $\boldsymbol{\sigma}$ *−derivatif.*

Bukti:

1. Dengan mudah dapat dilihat bahwa δ adalah suatu endomorfisma grup di *R*.
2. Misalkan *u* dan *v* seperti pada bagian 1, maka:

   $$\boldsymbol{uv} = (\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd})\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

   Dengan demikian,

   $$\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{uv}) = (\boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd}) = \left[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\boldsymbol{d} + \boldsymbol{b}\left[\boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right].$$

   Jadi diperoleh $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{uv}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$. ■

Dari Lemma 1 dan Lemma 2 terlihat bahwa $\boldsymbol{R}[\boldsymbol{x};\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta}]$ memenuhi syarat gelanggang polinom miring.

3. Pembentukan Ideal Prim Minimal

Dalam bagian ini akan diuraikan pembentukan ideal prim minimal dari $\mathrm{R}[\mathrm{x};\sigma,\delta]$. Ideal prim minimal dari $\mathrm{R}[\mathrm{x};\sigma,\delta]$ diperoleh dari ideal (σ,δ)-prim dari R.

3.1. Ideal Prim dari R.

Dalam bagian ini akan ditunjukkan bahwa:

$$I = \left\{a + b\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \mid a, b \in 2\mathbb{Z}\right\}$$

merupakan ideal prim dari *R*. Pembuktian bahwa *I* merupakan ideal prim dari *R* dilakukan dalam beberapa tahap.

1. Bukti bahwa *I* adalah ideal dari *R*.

   Ambil $a+b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in I$ dan $c+d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in D$, diperoleh
   $\left[a+b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[c+d\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]=(ac+bd)+(ad+bc+bd)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in I$

   Karena $(ac+bd),\ (ad+bc+bd) \in 2\mathbb{Z}$.

2. Bukti bahwa *I* adalah ideal maksimal dari *R*.
   Misalkan *M* adalah suatu ideal dari *R* sedemikian sehingga $I \subsetneq M$. Untuk menunjukkan bahwa *I* adalah ideal maksimal dari *R*, akan ditunjukkan bahwa $M=R$. Karena $I \subsetneq M$ maka *M* memuat elemen yang bebentuk seperti salah satu dibawah ini:
   a. $(2k+1)+(2l+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ untuk suatu $k,l \in \mathbb{Z}$.
   b. $(2k+1)+2l\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ untuk suatu $k,l \in \mathbb{Z}$.
   c. $(2k)+(2l+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ untuk suatu $k,l \in \mathbb{Z}$.

Bukti:

a. Jika $(2k+1)+(2l+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in M$ untuk suatu $k,l \in \mathbb{Z}$, maka

$\left[(2k+1)+(2l+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[(2k)+(2l+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]=[(2k+1)(2k)+(2l+1)(2l+1)]+[(2k+1)(2l+1)+(2l+1)(2k)+(2l+1)(2l+1)]\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\left(2k'+1\right)+2l'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \in M.$

Dengan demikian

$$1=\left[\left(2k'+1\right)+2l'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]-\left[\left(2k'\right)+2l'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left(2k'+1\right) \in M.$$

Karena $1 \in M$ dan *M* adalah suatu ideal dari *R*, maka $M=R$.

b. Jika $(2k+1)+2l\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ untuk suatu $k,l \in \mathbb{Z}$**,** maka dengan cara yang serupa dengan bagian a, dapat juga ditunjukkan bahwa $1 \in M$ sehingga diperoleh juga $M=R$.

c. Jika $(2k)+(2l+1)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ untuk suatu $k,l \in \mathbb{Z}$**,** maka dengan cara yang serupa dengan bagian a, dapat juga ditunjukkan bahwa $1 \in M$ sehingga diperoleh juga $M=R$.

Dari bagian a, b, dan c dapat ditunjukkan bahwa *I* adalah ideal maksimal. Selanjutnya, karena *R* adalah gelanggang komutatif, maka ideal maksimal juga merupakan ideal prim. Jadi *I* adalah ideal prim dari *R*.

3.2. Ideal $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})-$ Prim dari R

Pada bagian ini akan ditunjukkan satu bentuk ideal $(\sigma,\delta)-prim$ dari *R*.

Defenisi 1.
Misalkan S adalah suatu himpunan pemetaan-pemetaan dari R ke R sendiri. S-ideal dari R adalah suatu ideal I dari R sedemikian sehingga $S(I) \subseteq I$ *untuk setiap* $f \in S$. *Suatu S-ideal*

prim (atau S-prim) adalah suatu S-ideal murni I dari R sedemikian sehingga jika J, K adalah S-ideal yang memenuhi $JK \subseteq I$, *maka* $J \subseteq I$ *atau* $K \subseteq I$, [1].

Untuk pembahasan dalam gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ definisi di atas digunakan untuk kasus $S=\{\sigma\}$, $S=\{\delta\}$, dan $S=\{\sigma,\delta\}$.

Teorema 1.
Ideal $\boldsymbol{I}=\left\{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \mid \boldsymbol{a},\boldsymbol{b} \in 2\mathbb{Z}\right\}$. *Seperti yang didefinisikan pada bagian 3.1 merupakan ideal* $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})$ *−prim dari R.*

Bukti:
Karena $\boldsymbol{\sigma}\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{I})\subseteq\boldsymbol{I}$. Pada sisi lain $\boldsymbol{\delta}\left(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)=\boldsymbol{b}$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{I})\subseteq\boldsymbol{I}$. Dengan demikian, *I* merupakan $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})$ −ideal. Selanjutnya dari Bagian 3.1 diketahui bahwa *I* adalah ideal prim. Oleh karena itu, dengan mencermati Definisi 1, disimpulkan bahwa *I* merupakan $(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\delta})$ −prim. ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan Teorema 1 pada bagian terakhir diketahui bahwa $I=\left\{a+b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \mid a,b \in 2\mathbb{Z}\right\}$ adalah (σ,δ) −prim dari *R*. Dengan demikian, menggunakan Teorema 3.1. pada [1] disimpulkan bahwa $IR[x;\sigma,\delta]$ merupakan ideal prim dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$.

Daftar Pustaka

[1] Goodearl K.R., 1992. Prieme ideals in skew polinomial ring and quantized Weyl algebras. *J. of Algebra*, 150, 324-377.

[2] Goodearl K.R. dan Warfiled J.R., 1989. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. Cambridge University Press, London.

[3] McConnel J.C. dan Robson J.C., 1987. *Noncommutative Noetherian Rings*. John Wiley & Sons Inc., New York.