ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi

http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk

Vol. 4, No.2, 66-75, Januari 2008

Model Dengan Tundaan Waktu

Syamsuddin Toaha*

Abstrak

Pada tulisan ini dibahas model matematika yang melibatkan tundaan waktu, termasuk bagaimana munculnya tundaan waktu dalam suatu model dan urgensinya dilibatkan dalam model. Selanjutnya diberikan beberapa model yang melibatkan tundaan waktu. Beberapa metode yang biasa digunakan untuk menyelesaikan model dengan tundaan waktu, dan metode-metode yang digunakan dalam menganalisis kestabilan titik keseimbangan suatu model dengan tundaan waktu juga diberikan.

Kata Kunci : *margin tundaan waktu, kestabilan, tundaan waktu.*

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan turunan-turunan dari satu atau beberapa fungsi yang tidak diketahui. Persamaan diferensial biasa hanya melibatkan suatu fungsi yang tidak diketahui dan turunan-turunannya yang semuanya dievaluasi pada saat yang sama, yaitu pada saat *t*. Jenis yang lebih umum dari persamaan diferensial, yang biasa disebut persamaan diferensial fungsional, adalah suatu fungsi yang tidak diketahui yang muncul dengan berbagai argumen yang berbeda. Sebagai contoh; $x'(t) = -3x(t-2)$, $x'(t) = x(t) - x(t/3) + x'(t-1)$, $x'(t) = x(t)x(t-1) + t^2 x(t+1)$, atau dalam bentuk $x''(t) = -x'(t) - x'(t-1) - 3\sin x(t)$. Persamaan diferensial ini juga biasa disebut sebagai persamaan diferensial dengan deviasi argumen.

Suatu jenis persamaan diferensial fungsional yang sederhana dan mungkin lebih sering muncul dalam persoalan nyata adalah persamaan diferensial tunda (atau persamaan diferensial dengan argumen yang diperlambat). Hal ini berarti bahwa persamaan yang menyatakan beberapa turunan dari *x* pada waktu *t*, terhadap *x* dan turunan-turunannya yang lebih rendah pada waktu *t*, dan pada beberapa waktu sebelumnya. Contoh pertama dan keempat termasuk dalam jenis ini.

Model-model sederhana dalam bentuk persamaan diferensial atau sistem persamaan diferensial yang sering dijumpai, pada umumnya tidak melibatkan tundaan waktu. Sebagai contoh, model pertumbuhan populasi logistik $x'(t) = ax(t) - bx^2(t)$, model gerak $mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0$, dan masih banyak lagi contoh model-model dalam bidang lain yang serupa tetapi tidak melibatkan tundaan waktu.

Tundaan waktu (*time delay* atau *time lag*) penting dalam pemodelan masalah nyata sebab keputusan biasanya dibuat berdasarkan informasi pada keadaan sebelumnya. Haberman (1998) menyatakan bahwa hal ini penting untuk dipertimbangkan dalam memodel pertumbuhan populasi karena laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada waktu sekarang *t* tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu sebelumnya atau pada

* *Staf Pengajar pada Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Hasanuddin* Makassar
e-mail : syamsuddint@yahoo.com

waktu $(t-\tau)$. Sebagai contoh, laju pertumbuhan populasi manusia pada saat sekarang bergantung pada jumlah populasi 9 bulan yang lalu sebab seorang ibu membutuhkan waktu 9 bulan untuk melahirkan anak. Jadi sebenarnya jumlah populasi manusia bergantung pada kapan seorang ibu positif hamil. Contoh lain, sejumlah telur ikan memerlukan waktu beberapa hari untuk menjadi larva dan untuk menjadi ikan dewasa. Dalam sistem kontrol, output suatu sistem bergantung pada input dan obyek yang masuk dalam input perlu beberapa saat untuk menjadi suatu output.

Salah satu model yang melibatkan tundaan waktu adalah model pertumbuhan populasi *Australian sheep-blowfly* (Barnes & Fulford, 2002). Forys & Czochra (2003) memodifikasi model logistik tunda untuk memodel pertumbuhan tumor dan sangat mungkin untuk mempertimbangkan tipe-tipe persamaan diferensial tunda yang lain untuk memodel pertumbuhan tumor (Kowalczyk & Forys, 2002).

1. Model dengan Tundaan Waktu

2.1 Model Logistik dengan Tundaan Waktu

Model pertumbuhan populasi logistik diberikan oleh

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)$$

dengan r dan K adalah konstanta positif. Model di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx(t)}{x(t)dt} = r\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)$$

yang menyatakan rata-rata laju pertumbuhan populasi pada waktu t yang bergantung kepada jumlah populasi pada waktu t.

Kalau diperhatikan lebih jauh mengenai faktor-faktor yang mempengaruhi rata-rata laju perubahan populasi, maka akan terlihat kenyataan bahwa salah satu faktor yang mempengaruhi adalah jumlah populasi pada beberapa waktu yang lalu. Ini disebabkan karena jumlah populasi sekarang tidak serta merta mempengaruhi laju pertumbahan populasi, namun memerlukan beberapa saat untuk memberikan respon pada laju pertumbuhan populasi. Rata-rata laju pertumbuhan populasi sebenarnya bergantung pada $x(t-\tau_1)$, $x(t-\tau_2)$, $x(t-\tau_3)$, dan seterusnya, dengan $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \cdots$ merupakan konstanta positif.

Hutchinson dalam May (1974) mengusulkan untuk mengganti bentuk $\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)$ dengan bentuk $\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)$ pada model pertumbuhan populasi logistik, sehingga diperoleh

$$\frac{dx(t)}{x(t)dt} = r\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)$$

Bentuk $\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)$ pada model terakhir ini menyatakan suatu mekanisme yang bergantung pada pengaruh jumlah populasi sebelumnya yang memerlukan τ unit waktu untuk merespon perubahan pada rata-rata laju perubahan jumlah populasi. Selanjutnya model di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx(t)}{dt}=rx(t)\left(1-\frac{x(t-\tau)}{K}\right)$$

yang dikenal sebagai model logistik dengan tundaan waktu.

Bentuk umum dari model logistik dengan tundaan waktu di atas adalah

$$\frac{dx(t)}{dt}=x(t)\left(r-\sum_{j=1}^{n}b_j x(t-\tau_j)\right)$$

dengan *r*, b_j , τ_j ($j=1,2,\ldots,n$) adalah konstanta positif. Bentuk umum ini masih mempunyai varian-varian yang lain (Gopalsamy, 1992).

2.2 Sistem Kontrol

Suatu sistem yang melibatkan kontrol *feedback* tentunya akan selalu melibatkan tundaan waktu. Ini disebabkan karena diperlukan beberapa saat untuk merespon informasi yang diterima dan kemudian memberikan reaksi.

Tinjau suatu sistem gerak yang dibangun oleh persamaan diferensial linear homogen orde dua dengan koefisien konstanta positif

$$mx''(t)+bx'(t)+kx(t)=0\,.$$

Penurunan rumus untuk mendapatkan persamaan gerak di atas dapat dilihat pada Haberman (1998) atau pada Kaplan & Glass (1995).

Solusi dari persamaan di atas dengan syarat awal $x(t_0)$ dan $x'(t_0)$ adalah suatu fungsi yang meluruh secara eksponesial menuju ke nol. Misalkan solusi persamaan diklasifikasikan berdasarkan nilai koefisien *damping b*. Dalam kasus $b^2<4mk$ (*underdamped*), solusi beroskilasi dan juga menuju ke nol, $b^2>4mk$ (*overdamped*) solusi tidak beroskilasi tetapi menuju ke nol secara eksponesial, dan $b^2=4mk$ (*critically damped*) solusi menuju ke nol lebih cepat dalam kasus ini.

Dalam kasus sistem fisik di dalam laboratoirum, nilai *b* dapat dengan mudah diubah dan dinaikkan. Jika sistem gerak yang ditinjau adalah gerak kapal di atas gelombang, kasus Minorsky, dan *x* adalah sudut kemiringan dari posisi normal ke atas, maka seharusnya dipikirkan bagaimana cara mengubah nilai *b*. Mungkin perlu diperkenalkan suatu tangki yang secara parsial diisi air pada kedua sisi kapal, dan mungkin perlu dirancang servomekanis untuk memompa air dari satu tangki ke tangki yang lain sebagai usaha untuk menetralkan goyangan kapal. Harapannya, ini akan memunculkan suatu bentuk yang lain yang proporsional dengan $x'(t)$ pada persamaan diferensial di atas, katakan $qx'(t)$. Dengan demikian akan dipertimbangkan persamaan

$$mx''(t)+bx'(t)+qx'(t)+kx(t)=0\,.$$

Namun perlu diperhatikan bahwa servomekanis tidak dapat merespon secara serta merta. Dengan itu, persamaan di atas diubah menjadi

$$mx''(t)+bx'(t)+qx'(t-\tau)+kx(t)=0\,.$$

Sistem kontrol memerlukan waktu $\tau>0$ untuk merespon dan seterusnya, sehingga bentuk kontrol tersebut proporsional dengan kecepatan pada waktu sebelumnya, $t-\tau$.

Banyak fenomena yang telah diketahui yang melibatkan laju perubahan keadaan pada suatu waktu *t* yang ditentukan tidak hanya oleh keadaan sekarang, tetapi juga ditentukan oleh keadaan sebelumnya. Sebagai contoh, dalam mekanika meliputi viskoelastisitas, model gerak, kontrol gerak pada benda kaku, model pengkristalan polimer, peregangan filamen polimer. Juga pada fenomena dalam fisika meliputi dinamika oskilator, dinamika yang bersifat relatif, reaktor nuklir, distribusi jaringan, aliran panas dalam material. Contoh lain, model dengan tundaan waktu pada masalah teknikal meliputi proses penggilingan dan pemotongan, tundaan dengan teknologi, proses stabilisasi kapal, proses *chasing* mobil. Dalam biologi, contohnya meliputi model evolusi satu spesies, interaksi dua spesies, model dinamika populasi untuk interaksi *n* spesies, koeksistensi mikro organisma yang bersaing, masalah kontrol dalam ekologi, masalah kontrol dalam mikro biologi. Sedangkan dalam kedokteran meliputi model kadar gula dalam darah, kemoterapi kanker, model epidemi HIV, dan masih banyak lagi pada bidang lainnya (Kolmanovskii & Myshkis, 1992).

3. Metode untuk Persamaan Diferensial Tunda

Tidak seperti pada persamaan diferensial biasa, masih sangat sedikit metode-metode yang telah ditemukan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tunda. Metode yang adapun hanya terbatas untuk menyelesaikan kasus-kasus tertentu. Sebagai contoh, persamaan diferensial tunda $x^{'}(t) = -x(t-\tau)$. Jika $\tau = \dfrac{\pi}{2}$, maka solusinya adalah $x(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$ dengan c_1 dan c_2 adalah konstanta sebarang. Tetapi jika $\tau \neq \dfrac{k\pi}{2}$ untuk *k* bilangan bulat positif, maka solusi yang diperoleh tidak lagi dalam kelas $x(t) = c_1\cos(t) + c_2\sin(t)$.

3.1. Solusi Analitik (Metode Step)

Masalah nilai awal untuk persamaan diferensial tunda ditulis sebagai

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_n)), & t \geq t_0 \\ x(t) = \phi(t), & t \leq t_0\,. \end{cases}$$

Selanjutnya, akan ditinjau suatu masalah nilai awal yang sederhana sebagai berikut

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t-\tau), & t \geq 0 \\ x(t) = \phi(t), & \phi : [-\tau, 0] \to \Re. \end{cases}$$

Masalah nilai awal ini dapat diselesaikan secara eksplisit seperti berikut

$$x(t) = \int_0^{t-\tau} \phi(s_1 - \tau)\,ds_1 \text{ untuk } t \in [0, \tau],$$

$$x(t) = \int_\tau^{t} \int_0^{s_2-\tau} \phi(s_1 - \tau)\,ds_1 ds_2 \text{ untuk } t \in [\tau, 2\tau],$$

$$x(t) = \int_{2\tau}^{t} \int_\tau^{s_3-\tau} \int_0^{s_2-\tau} \phi(s_1 - \tau)\,ds_1 ds_2 ds_3 \text{ untuk } t \in [2\tau, 4\tau], \text{ dan seterusnya.}$$

Metode ini dikenal sebagai metode Step karena solusi diperoleh step demi step sesuai dengan interval dimana fungsi awal yang diberikan didefinisikan.

Contoh 1.
Tinjau masalah nilai awal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-1), & t \geq 0 \\ x(t) = 1, & t \in [-1,0]. \end{cases}$$

Dengan diketahuinya fungsi awal yang terdefinisi pada interval $[-1,0]$ maka pada interval $[0,1]$ persamaan diferensial tunda di atas dapat ditulis sebagai $\dot{x}(t) = -1$, dan selanjutnya diperoleh solusi $x(t) = -t + 1$. Pada interval $[1,2]$ diperoleh $\dot{x}(t) = -(-t+1)$ dengan solusi $x(t) = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2}$. Proses ini dapat diteruskan sebanyak interval waktu yang diinginkan. Mudah dilihat bahwa solusi yang diperoleh adalah suatu polinomial dengan orde yang membesar dengan bertambahnya interval yang diberikan, serta pada ujung-ujung interval solusinya secara umum tidak licin.

3.2. Metode *Lyapunov*

Analisis persamaan karakteristik untuk persamaan diferensial linear tunda maupun pada sistem persamaan diferensial tunda kadang sulit dilakukan, meskipun persamaan atau sistem persamaan hanya mengandung satu atau dua nilai tunda. Tidak seperti pada persamaan diferensial linear tanpa tunda, kriteria Routh-Hurwitz sudah cukup untuk mengalisis persamaan karakteristik dan selanjutnya jenis kestabilan titik keseimbangan dari persamaan diferensial atau sistem persamaan diferensial dapat ditentukan.

Kesulitan ini dapat diatasi dengan menggunakan metode fungsional Lyapunov, untuk mendapatkan syarat cukup kestabilan dan ketidakstabilan titik keseimbangan dari persamaan diferensial tunda dengan cara yang sama pada metode kedua Lyapunov untuk persamaan diferensial biasa.

Tinjau persamaan diferensial tunda

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t) \tag{1}$$

dimana $f : \Re \times C \to \Re^n$ adalah suatu fungsi kontinu, dan $f(t,0) = 0$. Misalkan $V : \Re \times C \to \Re$ adalah suatu fungsi yang kontinu, dan $x(\sigma,\phi)$ adalah solusi dari (1) yang melalui (σ,ϕ), maka

$$\dot{V} = \dot{V}(t,\phi) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\left[V(t, h, x_{t+h}(t,\phi)) - V(t,\phi)\right].$$

Didefinisikan $x_t \in C$, seperti $x_t(\theta) = x(t+\theta), \theta \in [-r, 0]$, dengan $C = C([a,b], \Re^n)$ adalah ruang Banach dari fungsi kontinu yang memetakan interval $[a,b]$ ke dalam $\Re^n$, $\Re^n$ adalah ruang Euclidian real dimensi *n*.

Teorema 1. (Kuang, 1993).
Misalkan $u(s), v(s), w(s) : \Re^+ \to \Re^+$ *adalah fungsi yang kontinu dan tidak turun,* $u(s) > 0$, $v(s) > 0$ *untuk* $s > 0$, *dan* $u(0) = v(0) = w(0) = 0$. *Maka pernyataan berikut adalah benar :*

(i) *Jika terdapat suatu fungsi* $V : \Re \times C \to \Re$ *sedemikian sehingga*

$$u(|\phi(0)|) \leq V(t,\phi) \leq v(\|\phi\|),$$

$$\dot{V}(t,\phi) \le -w(|D\phi|),$$

maka $x = 0$ *stabil secara seragam.*

(ii) *Jika, pada (i) ditambahkan* $\lim_{s\to+\infty} u(s) = +\infty$, *maka solusi dari (1) terbatas secara seragam (yaitu, untuk sebarang* $\alpha > 0$ *terdapat suatu* $\beta = \beta(\alpha) > 0$ *sedemikian sehingga, untuk setiap* $\sigma \in \Re$, $\phi \in C$, $\|\phi\| \le \alpha$ *maka berlaku* $|x(\sigma,\phi)(t)| \le \beta$ *untuk setiap* $t \ge \sigma$.*)*

(iii) *Jika, pada (i) ditambahkan* $w(s) > 0$ *untuk* $s > 0$, *maka* $x = 0$ *stabil secara asimptot dan seragam.*

Lemma 2. (Kuang, 1993).
Misalkan $a(t)$, $b(t)$ *terdiferensial, dan misalkan* $\mu(\theta)$ *adalah fungsi dengan variasi total terbatas sedemikian sehingga* $\mu(0) - \mu(-\tau) = 1$. *Maka*

$$\frac{d}{dt}\int_{b(t)}^{a(t)} x(\theta)d\theta = \dot{a}(t)x(a(t)) - \dot{b}(t)x(b(t)),$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\tau}^{0} x(t+\theta)d\theta = x(t) - x(t-\tau),$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\tau}^{0}\left(\int_{t+\theta}^{t} x(s)ds\right)d\mu(\theta) = x(t) - \int_{-\tau}^{0} x(t+\theta)d\mu(\theta).$$

Contoh 2.
Tinjau persamaan diferensial tunda

$$\dot{x}(t) - c\dot{x}(t-\tau) = -ax(t),$$

dengan $|c| < 1$ dan $a > 0$. Untuk persamaan di atas, diperoleh $D\phi = \phi(0) - c\phi(-\tau)$ yang stabil karena $|c| < 1$. Karena $\dot{x}(t)$ bergantung pada $\dot{x}(t-\tau)$, suatu fungsi dalam bentuk $V(x(t))$ akan mempunyai turunannya $\dot{V}$ yang meliputi $x(t)$ dan $\dot{x}(t-\tau)$. Hal ini ternyata sangat kompleks untuk menentukan tanda dari $\dot{V}$. Untuk membuang bentuk $\dot{x}(t-\tau)$, maka akan dicobakan $V_1(Dx_t) = (Dx_t)^2 = (x(t) - cx(t-\tau))^2$ dan diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{V}_1 &= 2(x(t) - cx(t-\tau))(-ax(t)) \\ &= -2ax^2(t) + 2acx(t)x(t-\tau).\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Lemma 2, maka disarankan menggunakan

$$V(x_t) = (Dx_t)^2 + ac^2\int_{t-\tau}^{t} x^2(s)ds.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_t) &= -2ax^2(t) + 2acx(t)x(t-\tau) + ac^2x^2(t) - ac^2x(t-\tau) \\ &= -a(x(t) - cx(t-\tau))^2 - a(1-c^2)x^2(t).\end{aligned}$$

Bagian (iii) dari Teorema 1 dipenuhi oleh $V(x_t)$, dan disimpulkan bahwa solusi trivial stabil global secara asimptot dan seragam.

3.3. Penentuan Margin Tundaan Waktu untuk Kestabilan dan Ketidakstabilan

Suatu model yang merupakan persamaan diferensial tunda dengan titik keseimbangan yang stabil jika nilai waktu tundanya sama dengan nol juga akan tetap stabil jika waktu tundanya positif dan nilainya dekat dengan nol. Hal ini terjadi karena fungsi karakteristiknya bergantung pada waktu tunda. Pada kasus yang demikian, maka analisis yang biasanya dilakukan adalah menentukan suatu nilai waktu tunda yang merupakan nilai margin kestabilan dan setelah nilai margin tersebut kondisi berubah menjadi tidak stabil.

Sekarang mari kita tinjau kestabilan persamaan deferensial-diferensi

$$y^{(n)}(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{q}a_{kj}y^{(j)}(t-k\tau)=0\,. \tag{2}$$

Koefisien a_{kj}, $k=0,1,\cdots,q$, $j=0,1,\cdots,n-1$ adalah konstanta real, dan $\tau\geq 0$ adalah parameter tundaan waktu. Kondisi kestabilan dari (2) dapat ditentukan dari persamaan karakteristiknya, sebagai contoh dapat dilihat pada Barnett (1983), Chen (1994), Gu & Lee (1989), dan Hale *et al.* (1985).

Teorema 3. (Chen *et al.*, 1995).
Anggap bahwa persamaan (2) *stabil untuk* $\tau=0$. *Misalkan* $H_n := 0,\ T_n := I$, *dan*

$$H_j := \begin{bmatrix} a_{qj} & a_{q-1,j} & \cdots & a_{1j} \\ 0 & a_{qj} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{qj} \end{bmatrix},\quad T_j := \begin{bmatrix} a_{0j} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{0j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{q-1,j} & a_{q-2,j} & \cdots & a_{0j} \end{bmatrix},$$

dimana $j=0,1,\cdots,n-1$,

$$U_j := \begin{bmatrix} (i)^j T_i & (i)^j H_j \\ (-i)^j H_j^{T} & (-i)^j T_j^{T} \end{bmatrix},\quad \textit{dimana } j=0,1,\cdots,n.$$

Lebih lanjut, definisikan

$$U := \begin{bmatrix} 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ -U_n^{-1}U_0 & -U_n^{-1}U_1 & \cdots & -U_n^{-1}U_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Maka, $\tau^*=\infty$ *jika* $\sigma(U)\cap R_+=\emptyset$ *atau* $\sigma(U)\cap R_+=\{0\}$. *Misalkan juga*

$$F(s) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ -a_0(s) & -a_1(s) & \cdots & -a_{q-1}(s) \end{bmatrix},$$

$$G(s) := diag\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1 & a_q(s)\end{pmatrix}.$$

Maka jika $\sigma(F(i\omega_k), G(i\omega_k)) \cap \partial D = \emptyset$ *untuk setiap* $0 \neq \omega_k \in \sigma(U) \cap R_+$, $\tau^* = \infty$. *Dalam kasus persamaan* (2) *stabil untuk setiap* $\tau \in [0, \infty)$. *Jika tidak demikian, maka*

$$\tau^* = \min_{1 \le k \le 2nq} \frac{\theta_k}{\omega_k},$$

dimana $0 \neq \omega_k \in \sigma(U) \cap R_+$ *dan* $\theta_k \in [0, 2\pi]$ *memenuhi relasi* $e^{-i\theta_k} \in \sigma(F(i\omega_k), G(i\omega_k))$. *Persamaan* (2) *stabil untuk setiap* $\tau \in [0, \tau^*)$ *dan tidak stabil pada* $\tau = \tau^*$.

Teorema 3 digunakan untuk menganalisis dan menentukan margin tundaan waktu. Dari teorema di atas diketahui bahwa pada $\tau = \tau^*$ titik keseimbangan kehilangan kestabilan dan bifurkasi Hopf mungkin terjadi pada titik tersebut (Hale, 1977).

Contoh 3.
Tinjau persamaan diferensial tunda

$$\ddot{y}(t) - 0.11893\, y(t) - 0.06953\, y(t-\tau) + 0.36427\, y(t-2\tau) - \\ 0.10299\, \dot{y}(t) + 1.26059\, \dot{y}(t-\tau) = 0.$$

Merujuk pada Teorema 3, maka dari persamaan diferensial tunda diperoleh

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0.3643 & -0.0695 \\ 0 & 0.3643 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1.2606 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_0 = \begin{pmatrix} -0.1189 & 0 \\ -0.0695 & -0.1189 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} -0.1030 & 0 \\ 1.2606 & -0.1030 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$U_0 = \begin{pmatrix} -0.1189 & 0 & 0.3643 & -0.0695 \\ -0.0695 & -0.1189 & 0 & 0.3643 \\ 0.3643 & 0 & -0.1189 & -0.0695 \\ -0.0695 & 0.3643 & 0 & -0.1189 \end{pmatrix},$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} -0.1030i & 0 & 0 & 1.2606i \\ 1.2606i & -0.1030i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1030i & -1.2606i \\ -1.2606i & 0 & 0 & 0.1030i \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.119 & 0 & 0.364 & -0.070 & -0.103i & 0 & 0 & 1.261i \\ -0.070 & -0.119 & 0 & 0.364 & 1.261i & -0.103i & 0 & 0 \\ 0.364 & 0 & -0.119 & -0.070 & 0 & 0 & 0.103i & -1.261i \\ -0.070 & 0.364 & 0 & -0.119 & -1.261i & 0 & 0 & 0.103i \end{pmatrix}$$

Dengan menggunakan Maple, diperoleh dua nilai eigen real yang positif $\omega_1 = 0.5393814259$ dan $\omega_2 = 0.4364077384$. Untuk $\omega_1 = 0.5393814259$, diperoleh

$$F_1(i\omega_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.40986 + 0.05555i & 0.06953 - 0.67994i \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$G_1(i\omega_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.36427 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$F_1(i\omega_1) - \lambda G_1(i\omega_1) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0.40986 + 0.05555i & 0.06953 - 0.67994i - 0.36427\lambda \end{pmatrix},$$

dan $\sigma\left(F_1(i\omega_1), G_1(i\omega_1)\right) = \{-0.4182 - 0.9083i,\ 0.6091 - 0.9583i\}$.

Nilai egien yang pertama berada pada ∂D tetapi yang kedua tidak berada pada ∂D. Dengan demikian $\sigma\left(F_1(i\omega_1), G_1(i\omega_1)\right) \cap \partial D \neq \emptyset$, dan diperoleh $\theta_1 = 2.002296476$. Lebih lanjut diperoleh $\gamma_1 = 3.712208801$. Sedangkan untuk $\omega_2 = 0.4364077384$, diperoleh

$$F_2(i\omega_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.30938 + 0.04495i & 0.06953 - 0.55013i \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$G_2(i\omega_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.36427 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya diperoleh

$$F_2(i\omega_2) - \lambda G_2(i\omega_2) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 0.30938 + 0.04495i & 0.06953 - 0.55013i - 0.36427\lambda \end{pmatrix}$$

dan $\sigma\left(F_2(i\omega_2), G_2(i\omega_2)\right) = \{-0.4418 - 0.7358i,\ 0.6327 - 0.7744i\}$.

Nilai eigen yang pertama tidak berada pada ∂D, tetapi yang kedua berada pada ∂D. Oleh karena itu $\sigma\left(F_2(i\omega_2), G_2(i\omega_2)\right) \cap \partial D \neq \emptyset$, dan diperoleh $\theta_2 = 0.8858175195$. Lebih lanjut diperoleh $\gamma_2 = 2.0297933337$, dan margin tundaan waktunya adalah $\tau^* = \gamma_2$. Dengan demikian disimpulkan bahwa titik keseimbangan trivial stabil untuk $0 \le \tau < 2.0297933337$.

Metode yang lain yang biasa juga digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tunda adalah dengan melakukan pendekatan dan mengubahnya dalam bentuk persamaan diferensi. Selanjutnya, analisis kestabilannya juga dengan menggunakan persamaan karakteristik dan nilai eigen. Metode numerik biasanya hanya digunakan untuk memplot kurva solusi persamaan diferensial. Metode numerik yang biasa digunakan adalah metode Runge-Kutta untuk persamaan diferensial tunda. *DDE solver* pada software Matlab dapat digunakan untuk memplot kurva solusi untuk persamaan diferensial tunda maupun sistem persamaan diferensial tunda dengan beberapa nilai waktu tunda yang berbeda.

4. Kesimpulan

Dalam memodelkan suatu masalah real yang melibatkan waktu, seyogyanya faktor tundaan waktu juga dipertimbangkan dalam proses pemodelan. Hal ini disebabkan karena banyak keputusan-keputusan yang diambil sekarang sebenarnya tidak lepas informasi atau kejadian yang telah terjadi sebelumnya. Dengan melibatkan tundaan waktu dalam model, maka model tersebut lebih mendekati fenomena yang sebenarnya.

Metode yang digunakan untuk menganalisis model dengan tundaan waktu berbeda dengan metode yang digunakan untuk model tanpa tundaan waktu. Analisis untuk model dengan tundaan waktu biasanya lebih kompleks dan masih sangat sedikit metode yang telah ditemukan. Simulasi numerik biasanya digunakan untuk menyelesaikan model dengan tundaan waktu yang kompleks, dan fasilitas yang ada pada software MATLAB dewasa ini, dapat membantu untuk memplotkan kurva solusi dari model dengan tundaan waktu.

Daftar Pustaka

[1]. B. Barnes dan G.R. Fulford, 2002, "*Mathematical modelling with case studies",* New York: Taylor & Francis Inc.

[2]. S. Barnett, 1983, "*Polynomial and Linear Control Systems",* New York: Marcel Dekker.

[3]. J. Chen, 1994, "*On computing the maximal delay intervals for stability of delay systems", Proc. American Control Conference*. pp 1934-1938.

[4]. J. Chen, G. Gu dan C.N. Nett, 1995, "*A new method for computing delay margins for stability of linear delay systems*", *Systems & Control Letters* 26:107-117.

[5]. U. Forys, dan A.M. Czochra, 2003, "*Logistic equations in tumour growth modeling", Int. J. Appl. Math. Comput. Sci*. 13(3):317-325.

[6]. K. Gopalsamy, 1992, "*Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics",* Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[7]. G. Gu dan E.B. Lee, 1989, "*Stability testing of time delay systems",* Automatica 35:777-780.

[8]. R. Haberman, 1998, "*Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*", Philadelphia: SIAM.

[9]. J.K. Hale, 1977, "*Theory of functional differential equations",* Heidelberg: Springer-Verlag.

[10]. J.K. Hale, E.F. Infante and F.S.P. Tsen, 1985, "*Stability in linear delay equations*", *Journal of Math. Anal. App*. 105:533-555.

[11]. D. Kaplan dan L. Glass, 1995, "*Understanding Nonlinear Dynamics",* Springer-Verlag, New York.

[12]. V. Kolmanovskii dan A. Myshkis, 1992, "*Applied theory of functional differential equations",* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[13]. R. Kowalczyk dan U. Forys, 2002, "*Qualitative analysis on the initial value problem to the logistic equation with delay", Math. Comp. Model* 35(1-2): 1-13.

[14]. Y. Kuang, 1993, "*Delay differential equations with application in population dynamics",* New York: Academic Press.

[15] R.M. May, 1974, "*Stability and* complexity *of model ecosystems*", Princeton, New Jersey: Princeton University Press.