ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 4, No.1, 12-18, Juli 2007

Hubungan Antara Konvergen Hampir di mana mana, Konvergen dalam ruang Lebesgue, Konvergen dalam ukuran pada fungsi terukur

Firman*

Abstrak

Dalam tulisan ini akan dibahas hubungan antara konvergen hampir dimana-mana dengan konvergen dalam ruang Lebesgue pada fungsi terukur, disamping itu juga akan dibahas hubungan antara konvergen dalam ruang Lebesgue dengan konvergen dalam ukuran pada fungsi terukur

Kata Kunci : *fungsi terukur, konvergen hampir dimana-mana, konvergen dalam ruang Lebesgue, konvergen dalam ukuran, ukuran Lebesgue.*

1. Pendahuluan

Salah satu cabang ilmu dalam bidang analisis yang cukup penting untuk dikaji sehubungan dengan kelompok bidang lain adalah mengenai kekonvergenan. Pada awalnya konsep konvergen yang kita kenal adalah konvergen barisan bilangan real, kemudian secara berurutan dikenal pula konvergen barisan fungsi.

Definisi 1.

Misalkan κ adalah suatu keluarga himpunana bagian dari X. κ disebut aljabar -σ jika memenuhi:

(i) $\phi, X \in \kappa$

(ii) jika $A \in \kappa$, maka $A^c \in \kappa$

(iii) jika $A_n \in \kappa, \forall n \in N$, maka $\bigcup A_n \in \kappa$

Pasangan terurut (X, κ) disebut ruang terukur

Definisi 2.

Misal (X, κ) ruang terukur. Suatu fungsi $f : X \to R$ dikatakan terukur , jika untuk setiap $\alpha \in R$ maka himpunan $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \kappa$

Definisi 3.

Ukuran adalah sebuah fungsi $\mu : \kappa \to R$ yang memenuhi

(i) $\mu(\phi) = 0$

(ii) $\mu(E) \geq 0$ untuk semua $E \in \kappa$

* *Staf pengajar pada Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

(iii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$, dengan E_n adalah barisan disjoint di κ

Definisi 4.

Tripel (X,κ,μ), dengan X himpunan sebarang, κ aljabar-σ pada X dan μ ukuran pada κ disebut ruang ukuran.

Definisi 5.

Sifat P dikatakan berlaku hampir dimana-mana atau $\mu - a.e,$ jika $\exists N \in \kappa$ dengan $\mu(N) = 0$ sehingga P berlaku pada $X \setminus N$. Dalam hal ini

1 $f = g,\ \mu - a.e$ jika dan hanya jika $\exists N \in \kappa$ dengan $\mu(N) = 0$ sehingga

$f(x) = g(x)\ , \forall x \in X \setminus N$

2 jika dan hanya jika $\exists N \in \kappa$ dengan $\mu(N) = 0$ sehingga

$f(x) = \lim\ f_n(x)\ , \forall x \in X \setminus N$

Definisi 6.

Misal $1 \le p < \infty$, ruang $L_p = L_p\,(X,\kappa,\mu)$ adalah kelas fungsi terukur yakni:

$L_p\,(X,\kappa,\mu) = \left\{ f\ :\ f : X \to R\ dan \int |f|^p\, d\mu < \infty \right\}$

Dua fungsi di L_p dikatakan μ-equivalent jika keduanya sama hampir dimana-mana. Kemudian norm di L_p didefenisikan sebagai berikut :

$$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p\, d\mu \right\}^{1/p}$$

Dengan norm tersebut ruang L_p adalah ruang bernorm yang lengkap atau ruang Banach.

Definisi 7.

Suatu barisan (f_n) di L_p adalah barisan Cauchy di L_p jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $m, n \ge M(\varepsilon),$ maka $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$ Suatu barisan (f_n) di L_p adalah konvergen ke f di L_p jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga jika $n \ge N(\varepsilon)$ maka $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon.$ Ruang linear bernorm adalah lengkap jika setiap barisan Cauchy konvergen ke elemen ruang tersebut.

Teorema 1.

Jika $1 \le p < \infty,$ maka ruang L_p adalah ruang linear bernorm yang lengkap dengan norm

$\|f\|_p = \left\{ \int |f|^p\, d\mu \right\}^{1/p}$

2. Pembahasan

2.1. Beberapa jenis kekonvergenan pada fungsi terukur

Definisi 8.

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi terukur. Barisan (f_n) dikatakan kovergen hampir dimana-mana ke f jika terdapat himpunan $M \in \beta$ dengan $\mu(M) = 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in X \setminus M$ terdapat bilangan asli $N(\varepsilon.x)$ sedemikian sehingga jika $n \geq N(\varepsilon, x)$, maka $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Definisi 9.

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi terukur.

Barisan (f_n) di L_p konvergen dalam L_p ke f , dengan $f \in L_p$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N(ε) sedemikian sehingga jika $n \geq N(\varepsilon)$, maka

$$\| f_n - f \|_p = \left\{ \int | f_n - f |^p \, d\mu \right\}^{1/p} < \varepsilon.$$

Barisan (f_n) di L_p dikatakan Cauchy dalam L_p, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N(ε) sedemikian hingga jika $n, m \geq N(\varepsilon)$.

Definisi 10.

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi terukur

Barisan (f_n) dikatakan kovergen dalam ukuran ke f , jika:

$$\lim_{m,n \to \infty} \mu\left(\left\{x \in X : \left| f_n(x) - f\ (x)\right| \geq \alpha \right\}\right) = 0,$$

untuk setiap $\alpha > 0$

2.2. Hubungan antara berbagai jenis konvergen pada fungsi terukur

Suatu barisan f_n yang konvergen hampir dimana-mana ke suatu fungsi f di L_p, tetapi tidak mengakibatkan konvergen dalam L_p. Hal ini dapat dilihat pada contoh berikut

Contoh 1.

Misalkan $f_n = n\chi_{[1/n, 2/n]}$.

(i) Akan ditunjukkan barisan $f_n = n\chi_{[1/n, 2/n]}$ konvergen hampir dimana-mana ke $f = 0$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Ambil $x \in X$

- Jika $x \leq 0$, maka $f_n(x) = n\chi_{[1/n, 2/n]} = 0$

  Jadi f_n konvergen ke $f = 0$
- Jika $0 < x \leq 2$

  Pilih N_0 sedemikian hingga $N_0 > \dfrac{2}{x}$

  Akibatnya $|f_n(x) - 0| = \left|n\chi_{[1/n, 2/n]}\right| = 0 < \varepsilon \qquad \forall n \geq N_0$
- Jika $x > 2$, maka $f_n(x) = 0, \quad \forall n$

Dengan demikian f_n konvergen ke $f=0$

(ii) Akan dibuktikan barisan f_n tidak konvergen dalam L_p ke fungsi $f \in L_p$

Pilih $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$

Perhatikan $\forall n \in N$ berlaku

$$\|f_n - f\|_p = \left\|n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}\right\|_p = \left[n^p \frac{1}{n}\right]^{1/p} \geq 1$$

Karena terdapat $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ maka untuk setiap bilangan asli $N(\varepsilon)$ berlaku

$$\|f_n - 0\|_p > \frac{1}{2}$$

Jadi terbukti bahwa f_n tidak konvergen dalam L_p ke fungsi $f=0$.

Tetapi jika barisan didominasi oleh suatu fungsi dalam L_p , maka barisan fungsi di L_p yang konvergen dimana-mana mengakibatkan konvergen dalam L_p, hal ini dapat dilihat dalam teorema berikut :

Teorema 2.

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi terukur di L_p yang konvergen hampir dimana-mana ke fungsi f. Jika terdapat g di L_p sedemikian sehingga:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad x \in X, n \in N$$

maka $f \in L_p$ dan f_n konvergen dalam L_p ke f.

Bukti:

Pilih $N \in \beta$ dengan $\mu(N)=0$ sedemikian hingga $f_n(x) \to f(x),\ x \in X \setminus N$

Karena $|f_n(x)| \leq g(x)$, $x \in X, n \in N$ dan $f_n(x) \to f(x),\ x \in X \setminus N$, maka $|f\ (x)| \leq g(x)$, $\forall x \notin X \setminus N$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Misal $x \in X \setminus N$ sebarang.

Pilih $N_0 \in N \ni |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, $\forall n \geq N_0$

Perhatikan $|f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x)|$

$< \varepsilon + g(x)$

Maka $|f(x)| \leq g(x)\ \forall x \in X \setminus N$. Dalam hal ini $|f(x)| \leq g(x), \mu.a.e$

Karena $g \in L_p$ dan diketahui f terukur dan $|f(x)| \leq g(x)$, maka f terintegralkan.

Jadi $f \in L_p$

Kemudian $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)| \leq 2g(x)$

Jadi $\left|f_n(x)-f(x)\right|^p \leq (2g(x)^p\ , \mu.a.e$

Karena $\lim\limits_{n\to\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|^p = 0\ , \mu.a.e$ dan $2^p g^p \in L_1$, maka menurut teorema kekonvergenan terdominasi Lebesque diperoleh

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \left|f_n - f\right|^p d\mu = \int_X 0\, d\mu = 0$$

Akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|f_n - f\right\|_p = 0$

Hubungan Konvergen dalam L_p dengan konvergen dalam ukuran

Dari definisi, akan ditinjau hubungan konvergen dalam L_p dan konvergen dalam ukuran

Teorema 3.

Jika (f_n) adalah barisan dari fungsi-fungsi di L_p yang konvergen dalam L_p ke $f \in L_p$, maka (f_n) konvergen dalam ukuran

Bukti.

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Pilih bilangan asli $N\left(\varepsilon^{1/p}\alpha\right)$

Karena (f_n) konvergen dalam L_p, maka

$$\left\|f_n(x) - f(x)\right\|_p = \left(\int\left|f_n(x)-f(x)\right|^p d\mu\right)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}\alpha.,$$

dengan $n \geq N\left(\varepsilon^{1/p}\alpha\right)$

Misalkan

$$E_n(\alpha) = \{x \in X : \left|f_n(x) - f(x)\right| \geq \alpha\},$$

maka $\int\left|f_n(x)-f(x)\right|^p d\mu = \left|f_n(x)-f(x)\right|^p \mu(E_n(\alpha)) \geq \alpha^p \mu(E_n(a))$

Perhatikan $\left\{\int\left|f_n(x)-f(x)\right|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}\alpha$

Sehingga $\left|f_n(x)-f(x)\right|^p \mu(E_n(\alpha)) < \varepsilon\alpha^p$

Jadi:

$$\mu(E_n(\alpha)) < \varepsilon.$$

Akibatnya $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\{x \in X : \left|f_n(x)-f(x)\right| \geq \alpha\} = 0$

Dengan demikian (f_n) konvergen dalam ukuran ke f .

Tetapi konvergen dalam ukuran belum tentu konvergen dalam $L_{p.}$ Hal ini dapat dilihat pada *contoh berikut :*

Contoh 2:

Barisan $f_n = n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ konvergen dalam ukuran ke fungsi $f = 0$, tetapi tidak konvergen dalam L_p ke fungsi $f = 0$

(i) Akan ditunjukkan konvergen dalam ukuran

Ambil $\alpha > 0$

Perhatikan $\left\{x \in X : \left|n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}\right| \geq \alpha\right\} = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$

Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang

Pilih $N_1 \in N$ sedemikian sehingga $N_1 \geq \alpha$

Pilih $N_2 \in N$ sedemikian sehingga $N_2 \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Pilih $N_0 = maks\{N_1\ , N_2\}$

Jadi:

$$\mu\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon,\ \forall n \geq N_0$$

Akibatnya barisan $f_n = n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ konvergen dalam ukuran ke fungsi $f = 0$

(ii) Akan ditunjukkan tidak konvergen dalam L_p ke $f = 0$

Pilih $\varepsilon = \frac{1}{2}$

Perhatikan $\forall n \in N$ berlaku

$$\| f_n - f \|_p = \left\| n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]} \right\|_p = \left[n^p \frac{1}{n} \right]^{\frac{1}{p}} \geq 1$$

Jadi terdapat $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sedemikian sehingga $\| f_n \|_p > \frac{1}{2}$

Akibatnya barisan $f_n = n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ tidak konvergen dalam L_p ke fungsi $f = 0$

Tetapi jika f_n didominasi oleh oleh fungsi $g \in L_p$, maka kekonvergenan dalam ukuran mengakibatkan konvergen dalam $L_{p.}$. Hal ini dapat dilihat pada teorema berikut:

Teorema 4.

Misalkan (f_n) adalah barisan fungsi-fungsi di L_p .

Jika (f_n) konvergen dalam ukuran ke f dan $g \in L_p$ sedemikian sehingga

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \mu.a.e$$

maka $f \in L_p$ dan (f_n) konvergen dalam L_p ke f

Bukti

(i) Akan dibuktikan $f \in L_p$

Karena f_n konvergen dalam ukuran ke f, maka f_n Cauchy dalam ukuran. Kemudian f_n di L_p, maka f_n terukur. Jadi terdapat sub barisan f_{n_k} yang konvergen hampir dimana–mana ke h, dengan $h = f$ hampir dimana – mana. Perhatikan f_{n_k} di L_p, dan terdapat $g \in L_p$, sedemikian sehingga:

$$\left| f_{n_k}(x) \right| \le g(x), \qquad \forall x \in X ,$$

Jadi $f \in L_p$.

(ii) Akan dibuktikan f_n konvergen dalam L_p ke f.

Andaikan f_n tidak konvergen dalam L_p ke f, maka terdapat subbarisan (g_k) dari f_n dan suatu $\in > 0$ sedemikian sehingga $\|g_k - f\| \ge \in$ untuk $k \in N$.

Karena (g_k) adalah subbarisan dari f_n, dimana barisan f_n konvergen dalam ukuran ke f. Karena g_k konvergen ke fungsi f maka (g_k) adalah barisan Cauchy. Karena (g_k) Cauchy dalam ukuran maka terdapat subbarisan (h_r) dari (g_k) yang konvergen hampir dimana–mana dan dalam ukuran ke fungsi h. Dari ketunggalan $h = f$ hampir dimana–mana. Karena h_r konvergen hampir dimana – mana ke f dan didominasi oleh fungsi g dalam L_p dan $\left| f_n(x) \right| \le g(x)$ maka

$$f \in L_p \text{ dan } \|h_r - f\|_p \to 0$$

Jadi h_r konvergen dalam L_p ke $f \in L_p$

Dengan demikian f_n konvergen dalam L_p ke f.

3. Kesimpulan

a. Suatu barisan fungsi terukur yang konvergen hampir dimana – mana belum tentu konvergen dalam L_p, tetapi jika barisan fungsi terukur didominasi oleh suatu fungsi dalam L_p maka barisan yang konvergen hampir dimana – mana mengakibatkan konvergen dalam L_p.

b. Suatu barisan fungsi terukur yang konvergen dalam L_p menyebabkan konvergen dalam ukuran, sebaliknya akan berlaku jika barisan fungsi tersebut didominasi oleh suatu fungsi dalam L_p.

Daftar Pustaka

[1]. Robert G Bartle, 1996, “*The Elements Of Integration*”, John Wiley & Sons, Inc New York. London, Sidney.

[2]. H. Lieb Elliot dan Michael Loss, 1997, “*Analysis, Graduate Studies In Mathematics*”, volume 14, American Mathematical Society.

[3]. Gabriel Klambauer, 1973, “*Real Analysis*”, American Elsevier Publishing Company, Inc. New York, London Amsterdam.