JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 20, No. 2, January 2024, pp. 332-339
DOI: 10.20956/j.v20i2.31418

Szeged Index and Padmakar-Ivan Index of Nilpotent Graph of Integer Modulo Ring with Prime Power Order

Indeks Szeged dan Indeks Padmakar-Ivan pada Graf Nilpoten pada Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima

Muhammad Naoval Husni[1], I Gede Adhitya Wisnu Wardhana[2*], Putu Kartika Dewi[3], I Nengah Suparta[4]

[1,2] *Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Mataram*
[3,4] *Program Studi Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha*

***Email**:[1)] naovalhusni50@gmail.com, [2*)]adhitya.wardhana@unram.ac.id*
[3)]kartika.dewi@undiksha.ac.id, [4)]nengah.suparta@undiksha.ac.id

Abstract

Recently, graphs have started to be used to represent a finite ring. Nikmehr and Khojasteh in the article defined the nilpotent graph of a ring S. Denoted Γ_S, is a graph with the set of vertices being all the elements in the ring S. Two vertices a and b are adjacent if and only if ab is nilpotent elements in the ring S. Topological index is a field that discusses graph structure based on the degree of each vertex of a graph and the distance between vertices. In this study, the author will gives the general formula of the Szeged index and Padmakar-Ivan index of the nilpotent graph graph of the modulo ring with prime power order. The result of this research is a general formula for the topological indices of nilpotent graphs of the integer modulo ring, called the Szeged index and the Padmakar-Ivan index.

Keywords: nilpotent graph, Szedge Index, Padmakar-Ivan index .

Abstrak

Beberapa tahun terakhir, graf mulai digunakan untuk merepresentasikan suatu gelanggang hingga. Nikmehr and Khojasteh dalam artikel mendefinisikan graf nipolten dari gelanggang R, disimbolkan Γ_R, adalah graf dengan himpunan simpul adalah semua unsur di gelanggang R. Dua simpul berbeda x, y bertetangga jika dan hanya jika xy merupakan unsur nilpoten pada gelangggang R. Indeks topologi adalah salah satu bidang yang membahas mengenai struktur graf berdasarkan pada jarak dan derajat dari setiap simpul, dalam penelitian ini penulis akan memberikan rumus umum dari indeks Szeged dan Index Padmakar-Ivan dari graf nilpoten dari gelanggang bilangan bulat modulo dengan orde pangkat prima. Hasil dari penelitian ini adalah rumus umum untuk indeks topologi graf nilpoten dari gelanggang modulo yaitu indeks Szeged dan indeks Padmakar-Ivan.

Kata kunci: graf nilpoten, indeks Szeged, indeks Padmakar-Ivan.

1. PENDAHULUAN

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan tak hampa simpul (V) dan himpunan sisi yang menghubungan simpul (E), ditulis dengan notasi $G = (V, E)$ [3]. Nikmehr and Khojasteh pada [9] memperkenalkan definisi terkait dengan graf nilpotent atas gelanggang R, dengan unsur- unsur di R merupakan simpul graf dan dua buah simpul dikatakan bertetangga jika dan hanya jika perkalian dua simpul merupakan unsur nilpotent. Unsur nilpoten adalah suatu unsur di graf G jika dipangkatkan suatu bilangan asli n , maka didapatkan unsur identitas [4]. Berbeda dengan Nikmehr and Khojasteh, Basnet dkk pada [2] dan Tahya dan Persulessy pada [12] memperkenalkan definisi lain dari graf nilpoten dimana graf nilpotent atas gelanggang R, dengan unsur non- nilpotent merupakan simpul dari graf dan dua simpul berbeda bertetangga jika dan hanya jika penjumlahan dua simpul merupakan unsur nilpoten. Malik dkk pada [8], berdasarkan pendefinisian graf nilpoten oleh Nikmehr and Khojasteh [9], berhasil menemukan beberapa karakteristik graf nilpoten atas gelanggang bilangan bulat modulo berorde pangkat prima, salah satu karakteristik yang didapat adalah bentuk graf yaitu terdiri dari subgraf lengkap dan subgraf bintang yang mendasari artikel ini.

Beberapa peneliti telah membahas mengenai indeks topologi pada graf, salah satunya adalah Husni dkk [6] yang telah membahas mengenai indeks Harmonik dan indeks Gutman pada graf coprima dari grup modulo dengan orde pangkat prima, kemudian Asmarani dkk [1] mengangkat kasus indeks Zagreb, indeks Weiner dan indeks Harmonik pada graf pangkat atas grup dihedral, dan Putra dkk [10] juga membahas mengenai indeks topologi dari graf pangkat pada grup bilangan bulat modulo, serta Ismail yang memberikan formulasi indeks Zagreb dari graf pembagi nol [11]. Penelitian ini khusus difokuskan pada indeks topologi Szeged dan indeks topologi Padmakar-Ivan (PI) pada graf nilpoten yang telah dijelaskan sebelumnya. Misalkan R suatu gelanggang, graf Nilpoten dari R dinotasikan dengan Γ_R, indeks topologi Szged dari Γ_R didefinisikan sebagai berikut:

$Sz(\Gamma_R) = \sum_{uv\in E(\Gamma_R)} n_u(uv|\Gamma_R) n_v(uv|\Gamma_R$dengan $e = uv$ merupakan sisi yang terbentuk oleh dua simpul $u, v \in V(\Gamma_R)$ yang berbeda yang memenuhi,

$$n_u(uv|\Gamma_R) = |\{w \in V(\Gamma_R) |\ d(w,u) < d(w,v)\}|$$
$$n_v(uv|\Gamma_R) = |\{w \in V(\Gamma_R) |\ d(w,v) < d(w,u)\}|$$

dimana $n_u(uv|\Gamma_R)$ merupakan banyak simpul dengan jarak ke simpul u lebih kecil dari jarak ke simpul v ,dan $n_v(uv|\Gamma_R)$ merupakan banyak simpul dengan jarak ke simpul v lebih kecil dari jarak ke simpul u dengan $u, v \in V(\Gamma_R)$ [5]. Topologi indeks selanjutnya merupakan modifikasi dari indeks Szeged yaitu indeks topologi Padmakar-Ivan (PI) yang didefinisikan sebagai berikut [13]:

$$PI(\Gamma_R) = \sum_{uv\in E(\Gamma_R)} n_u(uv|\Gamma_R) + n_v(uv|\Gamma_R)$$

modifikasi yang dimaksud pada poin diatas adalah pada indeks Szeged digunakan operasi perkalian n_u dan n_v, sedangkan pada indeks Padmakar-Ivan digunakan operasi penjumlahan n_u dan n_v. Namun, untuk istilah dari $n_u$dan n_v pada indeks Szeged dan Indeks Padmakar-Ivan sama .

2. METODE

Metode yang digunakan dalam studi ini adalah dimulai dengan kajian pustaka yang kemudian melakukan analisis pada kasus-kasus dengan pola orde grup tertentu, dan kemudian menemukan pola terhadap bentuk graf nilpoten yang terbentuk. Dari pola yang dibangun, konjektur indeks topologi szedge dan indeks topologi Padmakar-Ivan (PI) ditentukan pada graf nilpoten tersebut. Terakhir konjektur tersebut secara deduktif akan dibuktikan, sehingga didapatkan sebuah teorema baru.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berdasarkan latar belakang penelitian diatas, hal ini menarik dilakukan untuk mengembangkan pengetahuan mengenai perumuman indeks Szeged dan Padmakar- Ivan pada graf nilpoten atas gelanggang bilangan bulat modulo berorde pangkat prima. Adapun beberapa terminologi yang mendasari penelitian ini sebagai berikut.

Definisi 3.1. [4] Unsur a pada suatu ring dikatakan unsur nilpoten apabila terdapat bilangan bulat positif n sehingga $a^n = 0$.

Pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan orde pangkat prima perumuman himpunan unsur-unsur nilpoten disajikan pada Teorema 3.1.

Teorema 3.1. [8] Misalkan $\mathbb{Z}_n$ suatu gelanggang bilangan bulat modulo berorde $n = p^k$ dengan $k \in \mathbb{N}$, maka himpunan semua unsur nilpoten dari $\mathbb{Z}_n$ adalah $N(\mathbb{Z}_n) = \{\overline{0}, \overline{p}, \overline{2p}, \overline{3p}, \dots, \overline{p^k - p}\}$.

Definisi 3.2. [8] Graf nipolten dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$, disimbolkan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$, adalah graf dengan himpunan simpul adalah semua unsur digelanggang $\mathbb{Z}_n$. Dua simpul berbeda x, y bertetangga jika dan hanya jika $xy \in N(\mathbb{Z}_n)$ dengan $N(\mathbb{Z}_n)$ merupakan unsur nilpoten pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$.

Selanjutnya didapatkan bentuk graf nilpotent dari gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan orde pangkat prima berdasarkan pada Definisi 3.2 didapatkan Teorema 3.2 dan Teorema 3.3 sebagai berikut:

Teorema 3.2. [8] Misalkan $\mathbb{Z}_n$ suatu gelanggang bilangan bulat modulo berorde $n = p^k$ dengan $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memiliki suatu subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$.

Teorema 3.3. [8] Misalkan $\mathbb{Z}_n$ suatu gelanggang bilangan bulat modulo berorde $n = p^k$ dengan $k \in \mathbb{N}$, maka $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ memiliki $n - p^{k-1}$subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$.

Berdasarkan [8] didapatkan dua buah subgraf yakni subgraf lengkap yang dibentuk dari seluruh unsur nilpotennya dan subgraf bintang dibentuk dari unsur nilpoten dengan non nilpoten.

Lemma 3.1. [8] Misalkan $\mathbb{Z}_n$ suatu gelanggang bilangan bulat modulo berorde pangkat prima dan $N(\mathbb{Z}_n)$ himpunan seluruh unsur nilpoten pada $\mathbb{Z}_n$. Jarak dua buah simpul pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$adalah :

$$d(v_i, v_j) = \begin{cases} 1 & v_i, v_j \in N(\mathbb{Z}_n) \text{ dengan } i \neq j \\ 1 & v_i \in N(\mathbb{Z}_n) \text{ dan } v_j \notin N(\mathbb{Z}_n) \\ 2 & v_i, v_j \notin N(\mathbb{Z}_n) \text{ dan } i \neq j \end{cases}$$

Banyak sisi graf lengkap K_n yaitu $\frac{n(n-1)}{2}$, kemudian pada Teorema 3.3 sudah didapatkan banyak subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$ yang terdapat pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ sehingga,

Lemma 3.2. [8] Banyak sisi subgraf lengkap $K_{p^{k-1}}$ dan subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$ secara berturut turut pada bentuk graf nilpotent atas gelanggang $\mathbb{Z}_n$ yaitu $\frac{p^{k-1}(p^{k-1}-1)}{2}$ dan $(n - p^{k-1})(p^{k-1})$.

Lebih lanjut, simpul dari graf nilpoten atas $\mathbb{Z}_n$ mewakili unsur-unsur pada $\mathbb{Z}_n$. Diperhatikan pula, $\mathbb{Z}_n$merupakan gabungan dari $N(\mathbb{Z}_n)$ dan komplemennya.

$$V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \mathbb{Z}_n = \{U \cup V\}$$
$$U = \{u \in N(Z_n)\} \text{ dan } V = \{v \notin N(Z_n)\}$$

dengan $|U| = p^{k-1}$ dan $|V| = p^k - \left(p^{k-1}\right) = p^k - p^{k-1}$.

Setelah peneliti mengetahui karakteristik dari graf seperti jarak dan banyak sisi, peneliti selanjutnya merumuskan beberapa teorema mengenai indeks Szeged pada graf nilpoten atas gelanggang $\mathbb{Z}_n$ dengan orde pangkat prima sebagai berikut.

Teorema 3.4. Diberikan $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ graf nilpoten atas gelanggang $\mathbb{Z}_n$. Jika $n = p^k$ untuk suatu bilangan asli k maka $\mathrm{Sz}(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{1}{2}p^{k-2}(p^k - p + 2(p-1)^2p^{2k-1})$.

Bukti.

Indeks Szeged pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ didefinisikan sebagai berikut :

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{xy \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} n_x\left(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}\right) n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$$

dengan $e = xy$ merupakan sisi yang terbentuk oleh dua simpul $x, y \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ yang berbeda.

$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\, d(z,x) < d(z,y)\}|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\, d(z,y) < d(z,x)\}|$$

Kasus 1. Jika $x, y \in N(\mathbb{Z}_n)$.
Untuk $z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x$ dan $z \neq y$, berlaku $d(z,x) = d(z,y) = 1$.
Untuk $z = x$ atau $z = y$, diketahui $x, y \in N(\mathbb{Z}_n)$,
$z = x$ maka $d(z,x) = d(x,x) = 0 < d(z,y) = 1$.
$z = y$ maka $d(z,x) = 1 > d(z,y) = d(y,y) = 0$.
Untuk $z \notin N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x$ dan $z \neq x$, berlaku $d(z,x) = d(z,y) = 1$
Sehingga diperoleh,

$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\, d(z,x) < d(z,y)\}|$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x \text{ dan } z \neq y|\ d(z,x) < d(z,y)\} \cup \{z = x \text{ atau } z = y|\ d(z,x) < d(z,y)\} \cup \{z \notin N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x \text{ dan } z \neq y\}|d(z,x) < d(z,y)\}|$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\emptyset \cup \{x\} \cup \emptyset|$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{x\}|$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 1$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\, d(z,y) < d(z,x)\}|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x \text{ dan } z \neq y|\ d(z,y) < d(z,x)\} \cup \{z = x \text{ atau } z = y|\ d(z,y) < d(z,x)\} \cup \{z \notin N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x \text{ dan } z \neq y\}|d(z,y) < d(z,x)\}|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\emptyset \cup \{y\} \cup \emptyset|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{y\}|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 1$$

Kasus 2. Jika $x \in N(\mathbb{Z}_n)$ dan $y \notin N(\mathbb{Z}_n)$
Untuk $z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x$ dan $z \neq y$, berlaku $d(z,x) = d(z,y) = 1$
Untuk $z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z = x$ dan $z \neq y$, berlaku $d(z,x) = d(x,x) = 0 < d(z,y) = 1$
Untuk $z \notin N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x$ dan $z \neq y$, berlaku $d(z,x) = 1 < d(z,y) = 2$
Untuk $z \notin N(\mathbb{Z}_n), z = y$ dan $z \neq x$, berlaku $d(z,x) = 1 > d(z,y) = d(y,y) = 0$

$$n_x(xy|\mathbb{Z}_n) = |\{z \in (\Gamma_{\mathbb{Z}_n}),|\, d(z,x) < d(z,y)\}|$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x \text{ dan } z \neq v|d(z,x) < d(z,y)\} \cup \{z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z = x \text{ dan } z \neq y|d(z,x) < d(z,y)\} \cup \{z \notin N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x \text{ dan } z \neq v|d(z,x) < d(z,y)\} \cup \{z \notin N(\mathbb{Z}_n), z = y \text{ dan } z \neq x|d(z,x) < d(z,y)\}|$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\emptyset \cup \{x\} \cup\ \mathbb{Z}_n - (N(\mathbb{Z}_n) \cup \{y\}) \cup \emptyset\}$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{x,\ \mathbb{Z}_n - (N(\mathbb{Z}_n) \cup \{y\})\}|$$
$$n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^k - p^{k-1}$$

$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\, d(z,y) < d(z,x)\}|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x \text{ dan } z \neq y|\ d(z,y) < d(z,x)\} \cup \{z \in N(\mathbb{Z}_n),\ z = x \text{ dan } z \neq y|d(z,y) < d(z,x)\} \cup \{z \notin N(\mathbb{Z}_n),\ z \neq x|d(z,x) > d(z,y\} \cup \{z \notin N(\mathbb{Z}_n), z = y \text{ dan } z \neq x|d(z,y) < d(z,x)\}|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{\emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \{y\}\}|$$
$$n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 1$$

Sebelum menghitung indeks Szeged, diperhatikan bahwa graf nilpoten disusun oleh subgraf bintang dan subgraf lengkap serta telah disebutkan pada Teorema 3.3 dan Lemma 3.2 mengenai banyak sisi dari $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ adalah banyak sisi dari subgraf bintang $K_{1,p^{k-1}}$ sebanyak $(p^k - p^{k-1})(p^{k-1})$

dan subgraf lengkap memilii banyak sisi $\frac{p^{k-1}(p^{k-1}-1)}{2}$. Sehingga diperoleh bahwa indeks Szeged pada $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ sebagai berikut :

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{xy\in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{xy\in E\left(K_{p^{k-1}}\right)} n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}).n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + \sum_{xy\in E(K1,p^{k-1})} n_x(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}).n_y(xy|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{p^{k-1}(p^{k-1}-1)}{2}(1)(1) + (p^k - p^{k-1})(p^{k-1})(p^k - p^{k-1})(1)$$

$$Sze(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{p^{k-1}(p^{k-1}-1)}{2} + (p^k - p^{k-1})^2(p^{k-1})(1)$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{p^{k-1}(p^{k-1}-1)}{2} + (p^{2k} - p^{2k-1} - p^{2k-1} + p^{2k-2})(p^{k-1})$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{p^{k-1}[(p^{k-1}-1) + 2(p^{2k} - 2p^{2k-1} + p^{2k-2})]}{2}$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{p^{k-1}[(p^{k-1}-1) + 2(p^2 - 2p + 1)p^{2k-2}]}{2}$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{1}{2}p^{k-2}(p^k - p + 2(p-1)^2 p^{2k-1})$$

Teorema 3.5. Diberikan $\Gamma_{\mathrm{Z_n}}$ graf nilpoten dari ring Z_n . Jika $n = p^k$ untuk suatu k bilangan asli maka $\mathrm{PI}(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{k-3}(-p^2 + p^{2k} + p^{k+2} - 2p^{2k+1} + p^{2k+2})$.

Bukti.

Indeks Szeged didefinisikan sebagai berikut :

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{uv\in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$$

dengan $e = uv$ merupakan sisi yang terbentuk oleh dua simpul $u, v \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$ yang berbeda.

$$n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{w \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\ d(w,u) < d(w,v)\}|$$

$$n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{w \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\ d(w,v) < d(w,u)\}|$$

Berdasarkan pemaparan pada bukti teorema 4, untuk $e = uv$ dengan $u, v \in N(\mathbb{Z}_n)$, didapatkan nilai $n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 1$ dan $n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 1$. Untuk $e = uv$ dengan $u \in N(\mathbb{Z}_n)$ dan $v \notin N(\mathbb{Z}_n)$, diperoleh nilai $n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^k - p^{k-1}$ dan $n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = 1$. Sama halnya juga dengan kasus indeks Szeged pada indeks Padmakar-Ivan (PI) juga mempartisi bentuk graf nilpoten atas gelanggang bilangan bulat modulo kedalam subgraf lengkap dan subgraf bintang. Sehingga didapatkann index Padmakar-Ivan (PI) sebagai berikut ;

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{uv\in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})} n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})$$

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \sum_{uv\in E\left(K_{p^{k-1}}\right)} [n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})] + \sum_{uv\in E(K1,p^{k-1})} [n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) + n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n})]$$

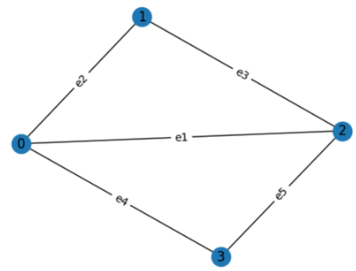
$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \frac{p^{k-1}(p^{k-1}-1)}{2}(1+1)[+(p^k - p^{k-1})(p^{k-1})(p^k - p^{k-1} + 1)$$

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{k-1}(p^{k-1}-1) + (p^{2k-1} - p^{2k-2})(p^k - p^{k-1} + 1)$$

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{k-1}(p^{k-1}-1) + (p^{2k-2})(p-1)(p^k - p^{k-1} + 1)$$

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = p^{k-3}(-p^2 + p^{2k} + p^{k+2} - 2p^{2k+1} + p^{2k+2}).$$

Contoh 3.1. Pada gelanggang $\mathbb{Z}_4$ himpunan nilpotennya adalah $\{0,2\}$. Himpunan simpulnya adalah $V(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = \{0,1,2,3\}$, dan karena perkalian unsur 0 dengna yang lain nol, maka 0 bertetangga dengan semua simpul lainnya, demikian juga didapatkan $1.2 = 2.3 = 2$ sehingga didapatkan himpunan sisinya adalah $E(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = \{01,02,03,12,23\}$. Dan didapatkan bentuk graf sebagai berikut :



Gambar 1. Graf nilpoten $\mathbb{Z}_4$

Kasus 1. Jika $u, v \in N(\mathbb{Z}_4)$

$$n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{w \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\ d(w,u) < d(w,v)\}|$$
$$n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = |\{w \in V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n})|\ d(w,v) < d(w,u)\}|$$

Berdasarkan Lemma 3.1, $d(w,u) = 1$ dan $d(w,v) = 1$. Mudah dilihat bahwa banyak simpul yang lebih dekat dengan simpul u daripada ke simpul v adalah satu yaitu u sendiri, sehinggan $n_u = |\{u\}| = 1$. Sedangkan banyak simpul yang lebih dekat dengan simpul v daripada ke simpul u adalah 1 yaitu v itu sendiri, sehingga $n_v = |\{v\}| = 1$.

$e_1 = \{u,v\} = \{0,2\}$
$n_u(e_1|\mathbb{Z}_4) = |\{0\}| = 1$
$n_v(e_1|\mathbb{Z}_4) = |\{2\}| = 1$

Kasus 2. Jika $u \in N(\mathbb{Z}_4)$, $v \notin N(\mathbb{Z}_4)$

Berdasarkan Lemma 3.1, $d(v,x) = 1$ dan untuk $w \in N(\mathbb{Z}_4)$ maka $d(w,v) = 1$, untuk $w \notin N(\mathbb{Z}_4)$ maka $d(w,v) = 2$. Mudah dilihat bahwa simpul yang lebih dekat dengan simpul u daripada ke simpul v adalah simpul yang merepresentasikan unsur non nilpoten kecuali v, serta u , misalkan $U = \{u \notin N(\mathbb{Z}_n)\}$ sehingan $n_u = |\{u\} \cup U \backslash \{v\}\}| = p^k - p^{k-1}$.

$e_2 = \{u,v\} = \{0,3\}$ | $e_4 = \{u,v\} = \{0,1\}$
$n_u(e_1|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = |\{0,1\}| = 2$ | $n_u(e_1|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = |\{0,3\}| = 2$
$n_v(e_1|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = |\{0\}| = 1$ | $n_v(e_1|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = |\{0\}| = 1$

$e_3 = \{u,v\} = \{2,3\}$ | $e_5 = \{u,v\} = \{2,1\}$
$n_u(e_1|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = |\{2,1\}| = 2$ | $n_u(e_1|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = |\{2,3\}| = 2$
$n_v(e_1|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = |\{2\}| = 1$ | $n_v(e_1|\Gamma_4) = |\{2\}| = 1$

Sehingga didapatkan nilai untuk n_u dan n_v sebagai berikut :

e	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
n_u	1	2	2	2	2
n_v	1	1	1	1	1

$$\mathrm{Sz}(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = \sum_{uv \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_4})} n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4})\, n_v(uv|\mathbb{Z}_4)$$

$$Sz(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = \sum_{uv \in E(K_{p^{k-1}})} n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}).\, n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) + \sum_{uv \in E(K1,p^{k-1})} n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}).\, n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4})$$

$$\mathrm{Sz}(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = (1)(1) + (2)(1) + (2)(1) + (2)(1) + (2)(1)$$
$$\mathrm{Sz}(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = (1)(1) + (4)(2)(1)$$
$$\mathrm{Sz}(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = 9$$

$$\mathrm{PI}(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = \sum_{uv \in E(\Gamma_{\mathbb{Z}_4})} n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4})\, n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4})$$

$$PI(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = \sum_{uv\in E\left(K_{p^{k-1}}\right)} [n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) + n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4})] + \sum_{uv\in E(K1,p^{k-1})} [n_u(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) + n_v(uv|\Gamma_{\mathbb{Z}_4})]$$

$$\mathrm{PI}(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = (1+1) + (2+1) + (2+1) + (2+1) + (2+1)$$

$$\mathrm{PI}(\Gamma_{\mathbb{Z}_4}) = 13$$

Teorema 3.4 dan Teorema 3.5 pada studi ini, secara khusus melengkapi hasil karakterisasi oleh Malik dan koleganya (Malik et al., 2023). Sekaligus juga memperkaya formulasi indeks topologi lain yang telah diberikan oleh beberapa penulis pada representasi graf yang berbeda dan dari struktur aljabar yang berbeda, diantaranya indeks Zagreb, indeks Harmonic, indeks Gutman, hingga indeks Weiner (Asmarani et al., 2023; Husni et al., 2022; Putra et al., 2023; Semil @ Ismail et al., 2023). Formulasi indeks Szeged dan indeks Padmakar-Ivan dalam penelitian ini diharapkan dapat memberikan pandangan baru mengenai ukuran numerik dari hubungan antar elemen-elemen dalam gelanggang, terutama dalam konteks hubungannya dengan unsur-unsur nilpoten.

4. KESIMPULAN

Pada artikel ini, didapatkan dua bentuk umum rumus untuk menghitung indeks topologi dari graf nilpoten atas gelanggang modulo berorde pangkat prima. Pertama adalah indeks Szedge didapatkan rumus umumnya $\frac{1}{2}p^{k-2}(-p + p^k + 2(-1+p)^2 p^{2k-1})$ dan indeks Padmakar-Ivan didapatkan rumus umumnya $p^{k-3}(-p^2 + p^{2k} + p^{k+2} - 2p^{2k+1} + p^{2k+2})$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Asmarani, E. Y., Lestari, S. T., Purnamasari, D., Syarifudin, A. G., Salwa, S., & Wardhana, I. G. A. W., 2023. The First Zagreb Index, The Wiener Index, and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni Dan Aplikasi*, *7*(4), 513–520.

[2] Basnet, D. K., Sharma, A., & Dutta, R., 2021. Nilpotent graph. *Theory and Applications of Graphs*, *8*(1), 1–8.

[3] Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P., 2010. *Graphs & digraphs* (Taylor & Francis group, Ed.; 5th ed.). CRC Press.

[4] Gallian, J., 2009. *Contemporary Abstract Algebra* (M. Julet, Ed.; 7th ed.). Richad Stratton.

[5] Gutman, I., & Dobrynin, A. A., 1998. The Szeged index -- A success story. *Graph Theory Notes of New York*, *34*(December), 37—44.

[6] Husni, M. N., Syafitri, H., Siboro, A. M., Syarifudin, A. G., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W., 2022. The Harmonic Index And The Gutman Index Of Coprime Graph Of Integer Group Modulo With Order Of Prime Power. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *16*(3), 961–966.

[7] Khadikar, P. V., Karmarkar, S., & Agrawal, V. K., 2001. A Novel PI Index and its Applications to QSPR/QSAR Studies. *Journal of Chemical Information and Computer Sciences*, *41*(4), 934–949.

[8] Malik, D. P., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., Widiastuti, R. S., Maulana, F., Syarifudin, A. G., & Awanis, Z. Y., 2023. Graf Nilpoten dari Gelanggang Bilangan Bulat Modulo Berorde Pangkat Prima (A Note on Nilpotent Graph of Ring Integer Modulo with Order Prime Power). *JMPM: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *8*(1), 28–33.

[9] Nikmehr, M. J., & Khojasteh, S., 2013. On the nilpotent graph of a ring. *Turkish Journal of Mathematics*, *37*(4), 553–559.

[10] Putra, L. R. W., Awanis, Z. Y., Salwa, S., Aini, Q., & Wardhana, I. G. A. W., 2023. The Power Graph Representation For Integer Modulo Group With Power Prime Order. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, *17*(3), 1393–1400.

[11] Semil @ Ismail, G., Sarmin, N. H., Alimon, N. I., & Maulana, F., 2023. The First Zagreb Index of the Zero Divisor Graph for the Ring of Integers Modulo Power of Primes. *Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences*, *19*(5), 892–900.

[12] Tahya, F., & Persulessy, E. R., 2020. Nilpotent Graph in Ring Zn. *Journal of Physics: Conference Series*, *1463*(1).

[13] Yatin, B. Z., Gayatri, M. R., Wardhana, I. G. A. W., & Prayanti, B. D. A., 2023. Indeks Hyper-Wiener Dan Indeks Padmakar-Ivan Dari Graf Koprima Dari Grup Dihedral. *Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika (JRAM)*, 7(2), 138-147.