JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 19, No. 2, January 2023, pp. 351-358
DOI: 10.20956/j.v19i2.23904

The Partition Dimension on the Grid Graph

Dimensi Partisi pada Graf Grid

Haspika[1*], Hasmawati[2*], Naimah Aris[3*]

**Department of Mathematics, Faculty Mathematics and Natural Sciences, Hasanuddin University, Indonesia*
E-mail: *haspikafhika73@gmail.com [1] ;hasmaba97@gmail.com [2];newima@gmail.com [3].*

Received: 7 November 2022; Accepted: 20 December 2022; Published: 5 January 2023

Abstract

Graph G is a discrete set pair with the notation $V(G)$ with its element called a vertex and the set of different and unordered pairs with the notation $E(G)$ where the element is called edge. One type of graph is a grid graph denoted $G_{m,n}$, graph of the result of the operation between two path graphs $(P_m \times P_n)$. The set of partition $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ of $V(G)$ is called a ***resolving partition*** *if its representation for each vertex in graph G is different. The value of k is said to be the partition dimension of G, if k is the minimum value of the resolving partition $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ of $V(G)$. The partition dimension of the graph G denoted with $pd(G)$. This paper discusses the dimension of the grid graph partition $G_{m,n}$ with the result $pd(G_{m,n}) = 3$ for $m, n \geq 2$ with n even value.*

Keywords: *graph grid, partition dimensions, set of resolving partition, the lower and upper bound*

Abstrak

Graf G adalah pasangan himpunan diskrit dengan notasi $V(G)$ yang anggotanya disebut titik dan himpunan pasangan-pasangan tak terurut dan berbeda dengan notasi $E(G)$ yang anggotanya disebut sisi. Salah satu jenis graf adalah graf grid yang diberi notasi $G_{m,n}$, suatu graf hasil operasi kali antara dua graf lintasan $(P_m \times P_n)$. Himpunan partisi $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ disebut **partisi pembeda** jika representasinya untuk setiap titik yang ada pada graf G berbeda. Nilai k dikatakan dimensi partisi dari G, jika k merupakan nilai minimum partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$. Dimensi partisi dari G dinotasikan dengan $pd(G)$. Tulisan ini membahas dimensi partisi graf grid $G_{m,n}$ dengan hasil $pd(G_{m,n}) = 3$ untuk $m, n \geq 2$ dan n bernilai genap

Kata Kunci: *graf grid, dimensi partisi, himpunan partisi pembeda, batas bawah dan batas atas*

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang sangat bermanfaat untuk membantu menyelesaikan suatu permasalahan dalam kehidupan nyata. Mempresentasikan permasalahan ke dalam bentuk graf, akan membuat permasalahan tersebut lebih mudah dimengerti dan lebih mudah mencari solusinya. Salah satu topik yang menjadi kajian penelitian dalam teori graf adalah dimensi metrik dan dimensi partisi. Dimensi metrik diperkenalkan pertama kali oleh Harry dan Melter pada tahun 1966. Dimensi metrik tidak mudah untuk diperoleh dari suatu graf tertentu. Oleh karena itu, untuk memperoleh dimensi metrik graf tertentu maka dilakukan analisis dari subgraf terlebih dahulu untuk memudahkan mendapatkan dimensi metrik dari graf secara umum [12]. Dimensi metrik dapat digunakan untuk pembahasan pada bidang lain seperti kimia, navigasi robot dan pencarian [9] dan optimasi kombinasi [7]. Untuk mendapatkan cara pandang baru dalam mendalami dimensi metrik graf, Chartrand, dkk (2000) memperkenalkan konsep baru disebut dimensi partisi graf.

Graf adalah pasangan himpunan terurut (V, E), dan ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan-pasangan tidak terurut dari anggota V yang disebut sisi. Menurut Chartrand, himpunan titik pada graf G dapat dibagi menjadi beberapa himpunan partisi S. Himpunan Π dengan $S \in \Pi$ disebut himpunan pembeda dari graf G jika setiap titik di G mempunyai representasi berbeda terhadap Π, dan Π merupakan himpunan dari k-partisi yang terurut. Kardinalitas minimum dari k-partisi pembeda terhadap $V(G)$ adalah dimensi partisi pada graf G yang dinotasikan dengan $pd(G)$. Hasil pada paper [1] menunjukkan bahwa dimensi partisi graf lintasan adalah $pd(P_n) = 2$ dan dimensi partisi graf lengkap adalah $pd(K_n) = n$. Selanjutnya, dimensi partisi telah banyak dikaji oleh peneliti, misalnya [4] menunjukan dimensi partisi dari kelas graf circulant, [8] menujukkan dimensi partisi dari beberapa kelas graf pohon dan [2] juga menunjukkan dimensi partisi dari graf multipartit dan graf hasil korona dari dua graf terhubung.

Salah satu contoh graf dalam teori graf adalah graf grid, yang merupakan hasil kali antara graf lintasan orde n dan orde m. Dikarenakan dari beberapa hasil penelitian sebelumnya belum ada yang membahas tentang dimensi partisi pada graf grid, maka dalam penelitian ini penulis akan menganalisis dimensi partisi pada graf grid.

2. Tinjauan pustaka

Secara umum dikenal beberapa macam pengertian graf. Pada [5] graf adalah pasangan himpunan (V, E), dengan V adalah himpunan diskrit yang anggota-anggotanya disebut titik, dan E adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota V yang disebut sisi. Jika graf (V, E) dinotasikan G, dengan kata lain $G = (V, E)$, maka $V = V(G)$ dan $E = E(G)$, sehingga graf $G = (V(G), E(G))$. graf $G = (V, E)$, jika $u, v \in V$ dengan $u \neq v$ dan $uv = vu$ maka graf G merupakan graf sederhana (*simple graph*). Barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2,3, \ldots, n-1$ disebut lintasan pada graf. Graf yang hanya memiliki sebuah lintasan disebut graf lintasan yang dinotasikan P_n untuk orde n.

Dalam graf dikenal beberapa operasi salah satu- diantaranya adalah operasi perkalian graf. Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$ dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$, maka graf kali $G \times H$ adalah graf dengan graf titik $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ dan himpunan sisi $E(G \times H) = \{xy | x = u_1 v_1, y = u_2 v_2; u_1 = u_2$ dan $v_1 v_2 \in E(H)$ atau $v_1 = v_2$ dan $u_1 u_2 \in E(G)\}$ [5]. Melalui operasi dalam graf bisa dihasilkan suatu jenis graf baru. Contohnya pada operasi perkalian atara dua graf lintasan yang menghasilkan graf grid. Pada [13] graf grid adalah graf hasil kali dari graf lintasan $(P_m \times P_n)$.

Partisi dari sebuah himpunan S adalah dekomposisi dari S ke dalam subset-subset tak kosong atau cell $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sedemikian sehingga :

a) $S_i \neq \emptyset$ untuk setiap $i = 1,2, \ldots, n$.
b) $S_i \cap S_j = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$, $i, j = 1,2, \ldots, n$.
c) $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n = S$.

Dengan demikian, *cell* dari partisi *disjoint*. [15].

Dimensi partisi dari suatu graf G pertama kali dikenalkan oleh Chartrand, Salehi dan Zhang (2000). Mereka mengelompokkan semua titik yang ada pada graf G ke sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap simpul ke partisi tersebut.

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya, S adalah himpunan bagian dari $V(G)$ dan v titik di G, jarak antara v dan S didefinisikan sebagai $d(v, S) = min\{d(v, x) | x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan koleksi himpunan $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, dengan S_j merupakan partisi dari $V(G)$. Himpunan $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ disebut himpunan partisi dan S_j disebut kelas partisi. Misalkan v titik di G, representasi v terhadap

$\prod$ didefinisikan sebagai $r(v|\prod) = \big(d(v,S_1), d(v,S_2), \ldots, d(v,S_k)\big)$. Himpunan partisi $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ dikatakan partisi pembeda, jika representasnya untuk setiap titik yang ada pada graf G berbeda. Nilai k dikatakan dimensi partisi dari G, jika k merupakan nilai minimum partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ dari $V(G)$. Dimensi partisi dari G dinotasikan dengan $pd(G)$.

Teorema 2.1 *Misalkan G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$.*
(i). $pd(G) = 2$ *jika dan hanya jika* $G = P_n$
(ii). $pd(G) = n$ *jika dan hanya jika* $G = K_n$
(iii). *Untuk* $n \geq 4$, $pd(G) = n - 1$ *jika dan hanya jika* $G = K_{r,s}, (r, s \geq 1, G = K_r + \overline{K_s}, (r \geq 1, s \geq 2), or\ G = K_r + (K_1 \cup K_s), (r, s \geq 1)$.

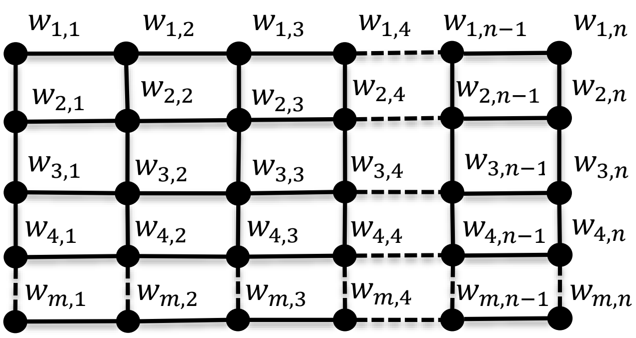
3. Hasil Utama

Hasil utama yang dibahas dalam makalah ini adalah konstruksi graf grid, batas bawah dan batas atas dimensi partisi graf grid, dan juga dimensi partisi pada graf grid, yang disajikan pada Teorema 3.1. Beberapa pernyataan yang cukup membantu dalam membuktikan Teorema 3.1 disajikan dalam bentuk Proposisi 3.1 sampai Proposisi 3.4.

Konstruksi Graf Grid

Perkalian dua graf lintasan merupakan operasi graf yang menghasilkan graf baru yaitu graf grid, Diberikan dua graf lintasan P_m dan P_n dengan n bernilai genap maka graf grid $P_m \times P_n$ mempunyai himpunan titik $V(P_m \times P_n) = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(P_m \times P_n) = \{w_{i,j}w_{i,j+1};\ w_{i,j}w_{i+1,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. Graf hasil kali $P_m \times P_n$ dapat digambarkan sebagai berikut:

$P_m \times P_n$:



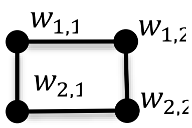
Gambar 3.1. Graf $P_m \times P_n$ dengan n bernilai genap

Proposisi 3.1 *Diberikan graf terhubung $G_{2,2}$, maka dimensi partisi graf $G_{2,2}$ adalah* $pd\big(G_{2,2}\big) = 3$.

Bukti:

Diberikan graf $G_{2,2}$ dengan himpunan titik $V\big(G_{2,2}\big) = \{w_{1,1}, w_{1,2}, w_{2,1}, w_{2,2}\}$ dan himpunan sisi $E\big(G_{2,2}\big) = \{w_{1,1}w_{1,2}, w_{1,1}w_{2,1}, w_{1,2}w_{2,2}, w_{2,1}w_{2,2}\}$ seperti pada gambar dibawah:

$G_{2,2}$:



Gambar 3.2. Graf $G_{2,2}$

Merujuk pada Teorema 2.1(i) yang menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$ atau $G \cong P_n$. Pada teorema ini diperoleh kontraposisinya yaitu $pd(G) \neq 2$ jika dan hanya jika $G \neq P_n$ dan $G \ncong P_n$. Karena $G_{m,n} \neq P_n$ dan $G_{m,n} \ncong P_n$ maka diperoleh dimensi partisi graf G adalah $pd(G) \neq 2$ atau dapat ditulis $pd(G_{2,2}) \geq 3$. … (3.1)

Selanjutnya akan dicari batas atas Graf $G_{2,2}$. Pilih himpunan partisi $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{w_{1,1}\}$, $S_2 = \{w_{2,1}\}$ dan $S_3 = \{w_{1,2}, w_{2,2}\}$. Refresetasi setiap titik di $G_{2,2}$ terhadap $\prod$ sebagai berikut:

$r(w_{1,1}|\prod) = (0,1,1)$ $\qquad$ $r(w_{1,2}|\prod) = (1,2,0)$

$r(w_{2,1}|\prod) = (1,0,1)$ $\qquad$ $r(w_{2,2}|\prod) = (2,1,0)$

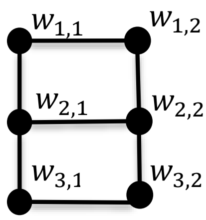
Terlihat dari hasil observasi di atas, semua titik dari graf $G_{2,2}$ mempunyai representasi yang berbeda, sehingga $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $G_{2,2}$ dengan kardinalitas $|\prod| = 3$. Jadi, $pd(G_{2,2}) \le 3$. … (3.2)

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi $G_{2,2}$ adalah $3 \le pd(G_{2,2}) \le 3$, jadi, dimensi partisi graf $G_{2,2}$ adalah $pd\left(G_{2,2}\right) = 3$. ■

Proposisi 3.2 Diberikan graf sederhana $G_{3,2}$, maka dimensi partisi graf $G_{3,2}$ adalah $pd\left(G_{3,2}\right) = 3$.
Bukti:

Diberikan graf $G_{3,2}$ dengan himpunan titik $V\left(G_{3,2}\right) = \{w_{1,1}, w_{1,2}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{3,1}, w_{3,2}\}$ dan himpunan sisi $E\left(G_{3,2}\right) = \{w_{1,1}w_{1,2}, w_{1,1}w_{2,1}, w_{1,2}w_{2,2}, w_{2,1}w_{2,2}, w_{2,1}w_{3,1}, w_{2,2}w_{3,2}, w_{3,1}w_{3,2}\}$ seperti pada gambar dibawah:

$G_{3,2}$:



Gambar 3.3. Graf $G_{3,2}$

Batas bawah dari graf $G_{3,2}$ dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan menentukan batas bawah graf $G_{2,2}$ pada Proposisi 3.1 sehingga diperoleh batas bawah dari graf $G_{3,2}$ adalah $pd(G_{3,2}) \ge 3$. … (3.3)

Selanjutnya akan dicari batas atas dari graf $G_{3,2}$. Untuk mencari batas atas dimensi partisi dari graf $G_{3,2}$ dapat diperoleh dengan mengkontruksi partisi pembeda $\prod$. Ambil partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan $S_1 = \{w_{1,1}\}$, $S_2 = \{w_{2,1}, w_{3,1}\}$ dan $S_3 = \{w_{1,2}, w_{2,2}, w_{3,2}\}$, sehingga diperoleh representasi untuk setiap titik di $G_{3,2}$ terhadap $\prod$ sebagai berikut:

$r(w_{1,1}|\prod) = (0,1,1)$, $\qquad$ $r(w_{1,2}|\prod) = (1,2,0)$,

$r(w_{2,1}|\prod) = (1,0,1)$, $\qquad$ $r(w_{2,2}|\prod) = (2,1,0)$,

$r(w_{3,1}|\prod) = (2,0,1)$, $\qquad$ $r(w_{3,2}|\prod) = (3,1,0)$.

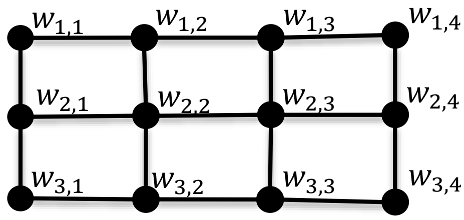
Dari hasil observasi diatas dapat dilihat bahwa setiap titik di graf $G_{3,2}$ terhadap $\prod$ berbeda dengan kardinalitas $|\prod| = 3$, sehingga diperoleh batas atas dimensi partisi graf $G_{3,2}$ adalah $pd(G_{3,2}) \le 3$. … (3.4)

Berdasarkan persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf $G_{3,2}$ adalah $3 \le pd(G_{3,2}) \le 3$. Jadi dimensi partisi graf $G_{3,2}$ adalah $pd\left(G_{3,2}\right) = 3$. ■

Proposisi 3.3 Diberikan graf sederhana $G_{3,4}$ maka dimensi partisi graf $G_{3,4}$ adalah $pd\left(G_{3,4}\right) = 3$.
Bukti:

Diberikan graf $G_{3,4}$ dengan himpunan titik $V\left(G_{3,4}\right) = \{w_{1,1}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, w_{2,1}, w_{2,2}, w_{2,3}, w_{2,4}, w_{3,1}, w_{3,2}, w_{3,3}, w_{3,4}\}$ dan himpunan sisi $E\left(G_{3,4}\right) = \{w_{1,1}w_{1,2}, w_{1,1}w_{2,1}, w_{1,2}w_{1,3}, w_{1,2}w_{2,2}, w_{1,3}w_{1,4}, w_{1,3}w_{2,3}, w_{1,4}w_{2,4}, w_{2,1}w_{2,2}, w_{2,1}w_{3,1}, w_{2,2}w_{2,3}, w_{2,2}w_{3,2}, w_{2,3}w_{2,4}, w_{2,3}w_{3,3}, w_{2,4}w_{3,4}, w_{3,1}w_{3,2}, w_{3,2}w_{3,3}, w_{3,3}w_{3,4}\}$ seperti pada gambar dibawah ini,

$G_{3,4}$:



Gambar 3.4. Graf $G_{3,4}$

Penentuan batas bawah dimensi partisi pada graf $G_{3,4}$ dapat diperoleh dengan cara yang sama pada Proposisi 3.1 dengan menggunakan Teorema 2.1(i), sehingga diperoleh batas bawah dimensi partisi pada graf $G_{3,4}$ adalah $pd(G_{3,4}) \geq 3$. … (3.5)

Selanjutnya untuk mencari batas atas dimensi partisi graf $G_{3,4}$ dengan cara yang sama dengan Proposisi 3.2 yaitu mengkontruksi partisi pembeda $\prod$. Ambil $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dengan S_1 dan S_2 sama dengan yang ada pada Proposisi 3.2 dan $S_3 = \{w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, w_{2,2}, w_{2,3}, w_{2,4}, w_{3,2}, w_{3,3}, w_{3,4}\}$. Akan ditunjukan bahwa representasi setiap titik di graf $G_{3,4}$terhadap $\prod$ berbeda. Sedangkan pada titik lainnya yaitu:

$r(w_{1,1} | \prod) = (0,1,1)$,
$r(w_{1,2} | \prod) = (1,2,0)$,
$r(w_{1,3} | \prod) = (2,3,0)$,
$r(w_{1,4} | \prod) = (3,4,0)$,
$r(w_{2,1} | \prod) = (1,0,1)$,
$r(w_{2,2} | \prod) = (2,1,0)$,
$r(w_{2,3} | \prod) = (3,2,0)$,
$r(w_{2,4} | \prod) = (4,3,0)$,
$r(w_{3,1} | \prod) = (2,0,1)$,
$r(w_{3,2} | \prod) = (3,1,0)$.
$r(w_{3,3} | \prod) = (4,2,0)$,
$r(w_{3,4} | \prod) = (5,3,0)$.

Terlihat dari hasil observasi diatas, semua titik pada graf $G_{3,4}$ memiliki representasi berbeda dengan kardinalitas $|\prod| = 3$, sehingga diperoleh batas atas dimensi partisi graf $G_{3,4}$ adalah $pd(G_{3,4}) \leq 3$. … (3.6)

Berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.6) diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf $G_{3,4}$ adalah $3 \leq pd(G_{3,4}) \leq 3$, sehimgga diperoleh dimensi partisi dari graf $G_{3,4}$ adalah $pd(G_{3,4}) = 3$. ■

Proposisi 3.4 Jika $m \geq 2$, maka dimensi partisi graf $G_{m,2}$ adalah $pd(G_{m,2}) = 3$
Bukti:

Misalkan graf $G_{m,2}$ dengan himpunan titik $V(G_{m,2}) = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 2\}$ dan himpunan sisi $E(G_{m,2}) = \{w_{i,1}w_{i,2}, w_{i,1}w_{i+1,1}, w_{i,2}w_{i+1,2} | 1 \leq i \leq m\}$. Penentuan batas atas dimensi partisi pada graf $G_{m,2}$, diperoleh dengan mengkontruksi partisi pembeda $\prod$. Ambil partisi pembeda $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ sedemikian sehingga:

$S_1 = \{w_{1,1}\}$,
$S_2 = \{w_{2,1}, w_{3,1}, w_{4,1}, \dots, w_{m,1}\}$ dan
$S_3 = \{w_{i,2} | 1 \leq i \leq m,\}$.

Akan ditunjukkan bahwa representasi setiap titik di graf $G_{m,2}$ berbeda terhadap $\prod$. dari hasil observasi diperoleh representasi setiap titik di graf $G_{m,2}$ sebagai berikut:

$r(w_{1,1} | \prod) = (0,1,1)$,
$r(w_{i,1} | \prod) = (i-1,0,1)$; jika $2 \leq i \leq m$,
$r(w_{i,2} | \prod) = (i,1,0)$; jika $2 \leq j \leq n$.

Terlihat dari hasil observasi di atas, semua titik dari graf $G_{m,2}$ mempunyai representasi yang berbeda. Jadi $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ merupakan partisi pembeda dari graf $G_{m,2}$ dengan kardinalitas $\prod$ adalah 3, sehingga diperoleh $pd(G_{m,2}) \leq 3$. … (3.7)

Untuk batas bawah dimensi partisi graf $G_{m,2}$ dapat dilakukan dengan cara yang sama pada proposisi 3.1 yang menggunakan Teorema 2.1(i), sehingga diperoleh batas bawah pada graf $G_{m,2}$ adalah $pd(G_{m,2}) \geq 3$. … (3.8)

Berdasarkan persamaan (3.7) dan (3.8) diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf G yaitu $3 \leq pd(G_{m,2}) \leq 3$. Jadi dimensi partisi dari graf $G_{m,2}$ adalah $pd(G_{m,2}) = 3$. ■

Dengan cara yang serupa dapat ditunjukkan bahwa $pd(G_{m,n})$ adalah 3 untuk $m = 4$ dan $n = 4$, dan untuk $m \geq 2$ dan $n = 4$.

Teorema 3.1 *Jika* $m, n \geq 2$ *dan* n *bernilai genap, maka dimensi partisi graf* $G_{m,n}$ *adalah* $pd(G_{m,n}) = 3$.

Bukti:

Dari kontruksi graf grid diperoleh himpunan titik $V(G_{m,n}) = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq m \; dan \; 2 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(G_{m,n}) = \{w_{i,j}w_{i,j+1}; w_{i,j}w_{i+1,j} | 1 \leq i \leq m \; dan \; 1 \leq j \leq m\}$. Pembuktian Teorema menggunakan metode induksi matematika, yaitu:

1. Berdasarkan hasil dari Proposisi 3.1, sampai Proposisi 3.4 diproleh:

a) $pd(G_{2,2}) = 3$,
b) $pd(G_{3,2}) = 3$,
c) $pd(G_{3,4}) = 3$,
d) $pd(G_{4,4}) = 3$,
e) Untuk $m \geq 2$, $pd(G_{m,2}) = 3$ dan
f) Untuk $m \geq 2$, $pd(G_{m,4}) = 3$.

2.a. Pada bagian ini yang diinduksi adalah n

Asumsikan bahwa $pd(G_{m,n}) = 3$ adalah benar jika $n = 2k$, yaitu $pd(G_{m,2k}) = 3$ untuk suatu $m \in \{2,3,4,5, \dots.\}$ dengan partisi pembeda minimum adalah $\prod_1 = \{S_1, S_2, S_3\}$, $S_1 = \{w_{1,1}\}$, $S_2 = \{w_{2,1}, w_{3,1}, w_{4,1}, \dots, w_{m,1}\}$ dan $S_3 = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq 2k\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa Teorema juga benar untuk $n = 2(k+1)$, yaitu $pd(G_{m,2(k+1)}) = 3$ untuk suatu $m \in \{2,3,4, \dots\}$. Untuk menentukan dimesi partisi graf $G_{m,2(k+1)}$ dapat diperoleh dengan mengkontruksi partisi pembeda graf $G_{m,2(k+1)}$. Misalkan $\prod_1' = \{S_1', S_2', S_3'\}$ sehingga demikian:

$S_1' = \{w_{1,1}\} = S_1$,
$S_2' = \{w_{2,1}, w_{3,1}, w_{4,1}, \dots, w_{m,1}\} = S_2$ dan
$S_3' = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq 2k\} \cup \{w_{i,2(k+1)} | \; 2 \leq i \leq m\} = S_3 \cup \{w_{i,2(k+1)} | \; 2 \leq i \leq m\}$.

Representasi seiap titik di graf $G_{m,2(k+1)}$ terhadap $\prod_1'$ adalah sebagai berikut:

$r(w_{1,1} | \prod_1) = (0,1,1)$,
$r(w_{1,j} | \prod_1) = (j-1, j, 0)$; jika $2 \leq j \leq 2k$,
$r(w_{i,1} | \prod_1) = (i-1, 0, 1)$; jika $2 \leq i \leq m$,
$r(w_{i,j} | \prod_1) = (j+i-2, j-1, 0)$; jika $2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq 2k$.
$r(w_{1,2(k+1)} | \prod_1') = (2k+1, 2k+2, 0)$;
$r(w_{i,2(k+1)} | \prod_1') = (2k+i, 2k+1, 0)$; jika $2 \leq i \leq m$.

Dapat dilihat dari hasil observasi diatas bahwa representasi setiap titik $G_{m,2(k+1)}$ terhadap $\prod_1'$ adalah bebeda. Jadi $pd(G_{m,n}) \leq 3$, untuk setiap n genap dan untuk suatu $m \geq 2$.

2.b. Pada bagian ini yan diinduksi adalah m

Asumsikan bahwa $pd(G_{m,n}) = 3$ adalah benar jika $m = k$, yaitu $pd(G_{k,n}) = 3$ untuk suatu $n \in \{2,4,6, \dots.\}$ dengan partisi pembeda minimum adalah $\prod_2 = \{S_1, S_2, S_3\}$, $S_1 = \{w_{1,1}\}$, $S_2 = \{w_{2,1}, w_{3,1}, w_{4,1}, \dots, w_{k,1}\}$ dan $S_3 = \{w_{i,j} | 1 \leq i \leq k, 2 \leq j \leq n$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa Teorema juga benar untuk $m = k + 1$, yaitu $pd(G_{k+1,n}) = 3$ untuk suatu $n \in \{2,4,6, \ldots\}$. Untuk menentukan dimesi partisi graf $G_{k+1,n}$ dapat diperoleh dengan mengkontruksi partisi pembeda graf $G_{k+1,n}$. Misalkan $\prod_2' = \{S_1', S_2', S_3'\}$ sehingga demikian:

$S_1' = \{w_{1,1}\} = S_1$,
$S_2' = \{w_{2,1}, w_{3,1}, w_{4,1}, \ldots, w_{k,1}\} \cup \{w_{k+1,1}\} = S_2 \cup \{w_{k+1,1}\}$ dan
$S_3' = \{w_{i,j} | 1 \le i \le k, 2 \le j \le n\} \cup \{w_{k+1,j} | \, 2 \le j \le n\} =$
$S_3 \cup \{w_{k+1,j} | \, 2 \le j \le n\}$.

Representasi setiap titik di graf $G_{k+1,n}$ terhadap $\prod_2'$ adalah sebagai berikut:

$r(w_{1,1} | \prod_2) = (0,1,1)$,
$r(w_{1,j} | \prod_2) = (j-1, j, 0)$; jika $2 \le j \le n$,
$r(w_{i,1} | \prod_2) = (i-1,0,1)$; jika $2 \le i \le k$,
$r(w_{i,j} | \prod_2) = (j+i-2, j-1,0)$; jika $2 \le i \le k, 2 \le j \le n$.
$r(w_{k+1,1} | \prod_2') = (k, 0,1)$;
$r(w_{k+1,j} | \prod_2') = (j+k-1, j-1,0)$; jika $2 \le j \le n$.

Dapat dilihat dari hasil observasi diatas bahwa representasi setiap titik $G_{k+1,n}$ terhadap $\prod_2'$ adalah bebeda. Jadi $pd(G_{m,n}) \le 3$, untuk setiap $m \ge 2$ dan untuk suatu n bernilai genap.

Berdasarkan 2.a. dan 2.b. diperoleh batas atas dimensi partisi dari graf $G_{m,n}$ adalah $pd(G_{m,n}) \le 3$, untuk setiap $m, n \ge 2$ dan n bernilai genap, selanjutnya untuk batas bawah dari dimensi partisi graf $G_{m,n}$ dapat diperoleh dengan cara yang sama dalam penentuan batas bawah pada Proposisi 3.1 yaitu dengan merujuk pada Teorema 2.1(i) menyatakan bahwa $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G = P_n$, sehingga diperoleh batas bawah dimensi partisi graf $G_{m,n}$ adalah $pd(G_{m,n}) \ge 3$. Sehingga diperoleh batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf $G_{m,n}$ adalah $3 \le pd(G_{m,n}) \le 3$. Jadi dimensi partisi dari graf $G_{m,n}$ adalah $pd(G_{m,n}) = 3$, untuk $m, n \ge 2$ dan n bernilai genap.■

Kesimpulan

Graf grid merupakan graf hasil operasi kali antara dua graf lintasan $(P_m \times P_n)$. Graf grid dapat ditulis $G_{m,n}$ dengan orde $m \times n$. Graf $G_{m,n}$ mempunyai himpunan titik $V(G_{m,n}) = \{w_{i,j} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ dan himpunan sisi $E(G_{m,n}) = \{w_{i,j}w_{i,j+1};\ w_{i,j}w_{i+1,j} | 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$.

Batas bawah dimensi partisi untuk graf $G_{m,n}$ untuk setiap $m, n \ge 2$ dan n bernilai genap adalah $pd(G_{m,n}) \ge 3$ dan batas atasnya adalah $pd(G_{m,n}) \le 3$. Karenanya dimensi partisi untuk graf $G_{m,n}$ untuk setiap $m, n \ge 2$ dan n bernilai genap berada diantara $3 \le pd(G_{m,n}) \le 3$ sehingga diperoleh dimensi partisi dari graf $G_{m,n}$ untuk setiap $m, n \ge 2$ dan n bernilai genap adalah $pd(G_{m,n}) = 3$.

Daftar Puastaka

[1] Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P., 2000. The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Math*. No. 59, 45-54.

[2] Darmaji, 2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*. Disertasi. Jurusan Matematika FMIPA ITB. Bandung.

[3] Dwi Dayanti, D., 2018. Infimum Passing Grade Prodi Pendidikan Matematika UNSIKA 2017. *Sesiomadika*, 187-195.

[4] Grigorious, C., Stephen, S., Rajan, B., Miller, M. & William, A., 2014. On the partition dimension of a class of circulant graphs. *Information Processing Letters*, Vol. 114, No. 7, 353-356.

[5] Hasmawati, 2020. *Pengantar dan Jenis-Jenis Graf*. UPT Unhas Press, Makassar.

[6] Hasmawati, Nurwahyu, B., Syukur Daming, A., & Kamal Amir, A., 2021. Dimensi Partisi Graf Kincir Angin Belanda. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, Vol. 17, No. 3, 472-483.

[7] Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I. M., Seara, C., cceres, J., & Puertas, M. L., 2005. On the metric dimension of some families of graphs. *Eletronic Notes in Discrete mathematics*. No. 22, 129-133.

[8] Ida Bagus Kade Puja Arimbawa, K., & Baskoro, E.T., 2015. Partition Dimension of Some Classes of Trees, *Procedia Computer Science*, 74, 67-72.

[9] Khuller, S., dan Raghavachari, B., 1996. Landmark in Graph. *Discrete Appl*. *Math*. No.70, 217-229.

[10] Mehreen, N., Farooq, R., & Akhter. S., 2018. On partition dimension of fullerene graphs,*AIMS Mathematics,* Vol. 3, No. 3, 343-352.

[11] Moreno, E., 2020. On the k-partition Dimension of graphs. *Theoretical computer science*, 806, 42-52.

[12] Permana, A., B,. & Darmaji, 2012. Dimensi Metrik Graf Pohon Bentuk Tertentu, *Jurnal Teknik Pomits*, Vol. 1, No. 1, 1- 4.

[13] Sudha, S., & Manikanda, K., 2015. General Pattern of Total Coloring of a Prims Graph of $n-$Layers and a Grid Graph. *Internasional Journal of Innovative Science and Modern Engineering*, Vol. 3, No. 03.

[14] Ur Rehman, T., & Mehreen,. N., 2020. Partition Dimension and Strong Metric Dimension of Chain Cycle, *Jordan Journal of mathematics and statistics*,Vol. 13, No. 2, 305-325.

[15] Wijaya, K., 2010. *Struktur Aljabar Ring*. UPT Penerbitan Universitas Jember. Jember.