

Prime Ideals in Matrices over Γ -Semihyperring

Ideal Prima dalam Matriks atas Γ -Semihyperring

Andi Muhammad Anwar^{1*}, A. Muh. Amil Siddik^{2*}, Ainun Mawaddah Abdal^{3*}

Abstract

The semihyperring structure is a common form of the hyperring structure with weakening properties. The more general structure is Γ -semihyperring, whose concept is generalized from Γ -semiring. This paper will show that the top matrix Γ -semihyperring is also Γ -semihyperring. The linkage between prime ideal of Γ -semihyperring with prime ideal of a matrix on Γ -semihyperring will also be discussed in this paper.

Keywords: Γ -Semihyperring, matrices over Γ -semihyperrings, prime ideal

Abstrak

Struktur *semihyperring* merupakan perumuman dari struktur *hyperring* dengan memperlemah sifatnya. Struktur lebih umum lagi yaitu Γ -*semihyperring* yang konsepnya diperumum dari Γ -*semiring*. Tulisan ini akan memperlihatkan bahwa matriks atas Γ -*semihyperring* juga merupakan Γ -*semihyperring*. Keterkaitan antara ideal prima dari Γ -*semihyperring* dengan ideal prima dari matriks atas Γ -*semihyperring* tersebut juga akan dibahas pada tulisan ini.

Kata Kunci: Γ -Semihyperring, matriks atas Γ -semihyperring, ideal prima

1. Pendahuluan

Struktur Γ -*semihyperring* merupakan perumuman dari beberapa konsep struktur aljabar sebelumnya yaitu Γ -ring [4], Γ -*semiring* [3], dan Γ -*semihypergroup* [7,1]. Pada *hyperstructure*, operasi biner yang digunakan adalah *hyperoperation* yang hasil pemetaannya berupa himpunan. Konsep *hyperstructure* memberikan banyak kontribusi pada penerapannya seperti dalam bidang graf yaitu *hypergraphs*, automata, kriptografi, kecerdasan buatan, dan juga dalam teori bilangan [5].

Struktur Γ -*semihyperring* salah satunya diperkenalkan oleh Davvaz dkk [3] pada Penelitian mengenai Γ -*semihyperring* sampai saat ini masih dikerjakan oleh beberapa peneliti. Salah satu penelitian terbaru mengenai Γ -*semihyperring* adalah yang dikerjakan oleh Kishor dkk mengenai Γ -

* Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin

Email :¹andimuhammadanwar08@gmail.com,² amilsiddik@unhas.ac.id,³ ainunabdal@gmail.com

semihyperring regular dan Γ -*semihyperring* idempoten [6]. Oleh karena itu, tulisan ini akan membahas mengenai bentuk khusus dari Γ -*semihyperring* yaitu himpunan matriks atas Γ -*semihyperring*. Konsep ideal prima pada matriks atas Γ -*semihyperring* juga diperkenalkan beserta dengan sifat yang terkait dengan ideal prima.

2. Beberapa Definisi dan Notasi

Hyperoperation merupakan fungsi $\circ : H \times H \rightarrow \wp(H)$ dengan H merupakan himpunan tak kosong dan $\wp(H)$ merupakan himpunan yang anggota-anggotanya merupakan subhimpunan tak kosong dari H . Pasangan dua objek (H, \circ) dikatakan sebagai *hypergroupoid*. Misalkan A dan B adalah subhimpunan tak kosong dari H dan $x \in H$, diperoleh aturan pengoperasian sebagai berikut:

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b = \{x \mid x \in a \circ b, a \in A, b \in B\}$$

dan

$$A \circ x = A \circ \{x\} \text{ dan } x \circ A = \{x\} \circ A.$$

Hypergroupoid (H, \circ) merupakan *semihypergroup* apabila memenuhi sifat asosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in H$ diperoleh $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. *Semihypergroup* (H, \circ) bersifat komutatif jika dan hanya jika setiap $a, b \in H$ memenuhi $a \circ b = b \circ a$. *Subsemihypergroup* (K, \circ) adalah subhimpunan dari *semihypergroup* H yang tertutup atas *hyperoperation* ($a \circ b \subseteq K, a \in K, b \in K$) dan memenuhi sifat asosiatif. Selanjutnya, struktur yang memiliki dua *hyperoperation* yang akan dibahas adalah Γ -*semihyperring*. Misalkan Γ merupakan grup komutatif dan $(R, +)$ merupakan *semihypergroup* komutatif, maka R merupakan Γ -*semihyperring* apabila terdapat suatu pemetaan $\cdot : R \times \Gamma \times R \rightarrow \wp(R)$, sehingga memenuhi kondisi, untuk setiap $r, s, t \in R$ dan untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$:

- (1) $r\alpha(s + t) = ras + rat$;
- (2) $(r + s)\alpha t = rat + sat$;
- (3) $r\alpha(s\beta t) = (ras)\beta t$; dan
- (4) $r(\alpha + \beta)s = ras + r\beta t$.

Struktur Γ -*semihyperring* bersifat komutatif apabila untuk setiap $r, s \in R$ dan $\alpha \in \Gamma$, maka $ras = sar$. Struktur Γ -*semihyperring* memuat unsur nol (“with zero”) apabila terdapat unsur $0 \in R$ yang memenuhi kondisi $r \in r + 0$, $0 \in r\alpha 0$, dan $0 \in 0\alpha r$ untuk setiap $\alpha \in \Gamma$ dan $r \in R$.

Misalkan A dan B adalah subhimpunan tak kosong dari Γ -*semihyperring* sehingga diperoleh aturan pengoperasian sebagai berikut:

$$A\Gamma B = \{x \mid x \in a\alpha b, a \in A, b \in B, \alpha \in \Gamma\}$$

Contoh 1:

Contoh berikut diperoleh dari [8], namun terdapat sedikit kesalahan pada jurnal tersebut yaitu “ $d + c = \{c, d\}$ ” dimana yang seharusnya adalah $d + c = \{a, b\}$. Berikut contoh dari Γ -*semihyperring*:

Misalkan $R = \{a, b, c, d\}$, maka $(R, +)$ merupakan *semihyperring* komutatif dengan aturan *hyperoperation*;

+	a	b	c	d
a	{a, b}	{a, b}	{c, d}	{c, d}
b	{a, b}	{a, b}	{c, d}	{c, d}
c	{c, d}	{c, d}	{a, b}	{a, b}
d	{c, d}	{c, d}	{a, b}	{a, b}

Misalkan $\Gamma = \mathbb{Z}_2$, sehingga aturan *hyperoperation* : untuk setiap $x, y \in R$, maka $x\bar{0}y = \{a, b\}$ dan;

$\bar{1}$	a	b	c	d
a	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}
b	{a, b}	{a, b}	{a, b}	{a, b}
c	{a, b}	{a, b}	{c, d}	{c, d}
d	{a, b}	{a, b}	{c, d}	{c, d}

Ideal kiri (kanan) I dari Γ -*semihyperring* R adalah *subsemihyperring* dari R sedemikian sehingga $\Gamma I \subseteq I$ ($I\Gamma \subseteq I$). Jika ideal I memenuhi ideal kiri dan ideal kanan, maka I cukup dikatakan sebagai ideal. Ideal I dari R dikatakan sebagai ideal prima jika $P\Gamma Q \subseteq I$ mengakibatkan $P \subseteq I$ atau $Q \subseteq I$ dengan P dan Q merupakan ideal dari R . Ideal I dari R merupakan ideal maksimal apabila tidak ada ideal sejati dari R ($I \neq R$) yang memuat I .

Contoh 2:

Pada Contoh 1, $P = \{a, b\}$ merupakan ideal prima dari R karena hanya P satu-satunya ideal sejati dari R .

3. Matriks atas Γ -Semihyperring

Hasil utama tulisan ini membahas mengenai himpunan matriks persegi $n \times n$ dengan entri-entri-entri merupakan elemen dari suatu Γ -*semihyperring*. Misalkan R merupakan Γ -*semihyperring* dan $M_n(R) = \{X = (x_{ij}) \mid x_{ij} \in R\}$ merupakan himpunan semua matriks $n \times n$ dengan entri-entri-entri merupakan elemen dari R . Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan matriks $M_n(R)$ juga membentuk Γ' -*semihyperring* dengan Γ' merupakan suatu grup komutatif.

Proposisi 3.1. Misalkan R merupakan Γ -*semihyperring*. Maka $M_n(R)$ merupakan Γ' -*semihyperring* dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$ merupakan grup komutatif atas penjumlahan matriks. Lebih lanjut, jika R memuat unsur nol maka demikian pula dengan $M_n(R)$.

Bukti:

Pertama, akan dibuktikan bahwa terdapat *hyperoperation* di $M_n(R)$ dan memenuhi sifat asosiatif. Definiskan pemetaan $+_M: M_n(R) \times M_n(R) \rightarrow \wp(M_n(R))$, yaitu:

$$A +_M B = (a_{ij}) +_M (b_{ij}) = \{(c_{ij}) \mid c_{ij} \in a_{ij} + b_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\}$$

dengan $A, B \in M_n(R)$. Ambil $A, B, C \in M_n(R)$, dengan menggunakan sifat asosiatif *hyperoperation* " + " di R sehingga diperoleh;

$$\begin{aligned}
A+_M(B+_MC) &= \{(z_{ij})|(z_{ij}) \in (a_{ij}) + (d_{ij}), \quad (d_{ij}) \in B+_M C\} = \\
&= \{(z_{ij})|z_{ij} \in a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}), 1 \leq i, j \leq n\} \\
&= \{(z_{ij})|z_{ij} \in (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}, 1 \leq i, j \leq n\} \\
&= \{(z_{ij})|(z_{ij}) \in (e_{ij}) + (c_{ij}), \quad (e_{ij}) \in A+_M B\} = (A+_M B)+_M C
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $(M_n(R), +)$ merupakan *semihypergroup*. Selanjutnya, misalkan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$ dan definisikan pemetaan $\circ_M: M_n(R) \times \Gamma' \times M_n(R) \rightarrow \wp(M_n(R))$, yaitu :

$$A \circ_M \alpha \circ_M B = \left\{ (z_{ij}) | z_{ij} \in \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{il} \alpha_{lk} b_{kj}, 1 \leq i, j \leq n \right\}.$$

Berdasarkan *hyperoperation* “+_M” dan “ \circ_M ”, bisa dengan mudah dibuktikan bahwa untuk setiap $A, B, C \in M_n(R)$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma'$,

$$A \circ_M \alpha \circ_M (B+_MC) = A \circ_M \alpha \circ_M B + A \circ_M \alpha \circ_M C,$$

$$(A+_MB) \circ_M \alpha \circ_M C = A \circ_M \alpha \circ_M C+_M A \circ_M \alpha \circ_M C,$$

$$A \circ_M \alpha \circ_M (B \circ_M \beta \circ_M C) = (A \circ_M \alpha \circ_M B) \circ_M \beta, \text{ dan}$$

$$A \circ_M (\alpha+_M \beta) \circ_M B = A \circ_M \alpha \circ_M B + A \circ_M \beta \circ_M B.$$

Jadi, terbukti bahwa $M_n(R)$ merupakan Γ' -*semihypergroup*. Selanjutnya, misalkan R memuat unsur nol sehingga terdapat $0_n \in M_n(R)$ yang semua elemennya merupakan unsur nol dari R yang memenuhi kondisi $A \in A + 0_n$, $0_n \in A\alpha 0_n$, dan $0_n \in 0_n \alpha A$ untuk setiap $\alpha \in \Gamma'$ dan $A \in M_n(R)$. ■

Proposition 3.2. Misalkan R merupakan Γ -*semihypergroup* dan I merupakan ideal kiri (kanan) dari R , maka $M_n(I)$ merupakan ideal kiri (kanan) dari Γ' -*semihypergroup* $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$. Implikasi serupa juga berlaku apabila I merupakan ideal dari R .

Bukti:

Misalkan I merupakan suatu ideal kiri dari R sehingga berdasarkan bukti dari Proposisi 3.1., maka diperoleh bahwa $M_n(I)$ merupakan *subsemihypergroup* dari $M_n(R)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $M_n(R) \circ_M \Gamma' \circ_M M_n(I) \subseteq M_n(I)$. Ambil $X \in M_n(R) \circ_M \Gamma' \circ_M M_n(I)$ sehingga $X \in P \circ_M \alpha \circ_M Q$ dengan $P \in M_n(R)$, $\alpha \in \Gamma'$, dan $Q \in M_n(I)$. Karena

$$P \circ_M \alpha \circ_M Q = \left\{ (z_{ij}) | z_{ij} \in \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n p_{il} \alpha_{lk} q_{kj}, 1 \leq i, j \leq n \right\},$$

maka $X = (x_{ij})$ dengan $x_{ij} \in \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n p_{il} \alpha_{lk} q_{kj}$. Karena I merupakan ideal kiri dari R , sehingga untuk $1 \leq i, j \leq n$, $p_{il} \alpha_{lk} q_{kj} \in I$. Jadi diperoleh $x_{ij} \in I$ untuk $1 \leq i, j \leq n$, sehingga $X \in M_n(I)$. Jadi terbukti bahwa $M_n(I)$ merupakan ideal kiri di $M_n(R)$. Dengan cara yang serupa, mudah juga dibuktikan apabila $M_n(I)$ merupakan ideal kanan dari $M_n(R)$ ataupun $M_n(I)$ merupakan ideal dari $M_n(R)$. ■

Hasil yang akan dibahas berikutnya mengenai hubungan antara ideal prima dari R dengan ideal dari $M_n(R)$. Namun, sebelum menjelaskan hubungan tersebut, proposisi berikut diperlukan.

Proposisi 3.3. Misalkan R merupakan Γ -semihypperring dan I merupakan ideal dari R . Jika untuk $r, s \in R$ yang memenuhi $r\Gamma s \subseteq I$ mengakibatkan $r \in I$ atau $s \in I$, maka I merupakan ideal prima dari R .

Bukti: Misalkan I merupakan ideal dari Γ -semihypperring R dan untuk $r, s \in R$ yang memenuhi $r\Gamma s \subseteq I$ mengakibatkan $r \in I$ atau $s \in I$. Ambil P dan Q ideal dari R sedemikian sehingga memenuhi $P\Gamma Q \subseteq I$. Misalkan $P \not\subseteq I$, sehingga terdapat $p \in P$ tetapi $p \notin I$. Ambil sebarang $q \in Q$ sehingga $p\Gamma q \subseteq I$, sehingga diperoleh $p \in I$ atau $q \in I$. Karena $p \notin I$, maka jelas $q \in I$. Akibatnya $Q \subseteq I$. Jadi, terbukti bahwa I merupakan ideal prima dari R . ■

Teorema 3.4. Misalkan R merupakan Γ -semihypperring dan I merupakan ideal dari R . Jika $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ' -semihypperring $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka I merupakan ideal prima dari R .

Bukti: Misalkan I merupakan suatu ideal dari R dan $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari $M_n(R)$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa I merupakan ideal prima dari R . Ambil $u, v \in R$ sedemikian sehingga $u\Gamma v \subseteq I$ dan $u \notin I$. Misalkan $U = (u_{ij})$ dan $V = (v_{ij})$ dengan $u_{ij} = u$ dan $v_{ij} = v$ untuk $1 \leq i, j \leq n$. Karena I tertutup pada hyperoperation "+", diperoleh $U \circ_M \Gamma \circ_M V \subseteq M_n(I)$. Karena $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari $M_n(R)$, maka berdasarkan Proposisi 3.3. diperoleh $U \in M_n(I)$ atau $V \in M_n(I)$. Karena $u \notin I$, sehingga $U \notin M_n(I)$. Jadi $V \in M_n(I)$, sehingga diperoleh $v \in I$. Jadi, I merupakan ideal prima dari R . ■

Lema 3.5. Misalkan I merupakan ideal maksimal dari Γ -semihypperring R . Jika $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ' -semihypperring $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka $R\Gamma R$ tidak termuat di I .

Bukti: Berdasarkan Teorema 3.4., diperoleh bahwa I merupakan ideal prima dari R . Andaikan $R\Gamma R \subseteq I$, karena I merupakan ideal prima, sehingga diperoleh $R \subseteq I$. Karena I merupakan ideal maksimal dari R , sehingga terjadi kontradiksi. Akibatnya, $R\Gamma R$ tidak termuat di I . ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil di Subbab 3, maka diperoleh kesimpulan:

1. Jika R merupakan Γ -semihypperring, maka $M_n(R)$ merupakan Γ' -semihypperring dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$ merupakan grup komutatif atas penjumlahan matriks.
2. Jika I merupakan ideal kiri (kanan) dari R , maka $M_n(I)$ merupakan ideal kiri (kanan) dari Γ' -semihypperring $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$. Begitupun demikian apabila I merupakan ideal dari R .
3. Jika I merupakan ideal dari R dan $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ' -semihypperring $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka I merupakan ideal prima dari R .
4. Jika I merupakan ideal maksimal dari Γ -semihypperring R dan $M_n(I)$ merupakan ideal prima dari Γ' -semihypperring $M_n(R)$ dengan $\Gamma' = M_n(\Gamma)$, maka $R\Gamma R$ tidak termuat di I .

Daftar Pustaka

- [1] D. Heidari, S.O. Dehkordi and B. Davvaz, *Γ -semihypergroups and their properties*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A: Appl. Math. Phys., **72**(2010), 195-208.
- [2] H. Hedayati and B. Davvaz, *Fundamental relation on Γ -hyperrings*, Ars Combin., **100**(2011), 381-394.
- [3] M. M. K. Rao, *Γ -semirings. I*, Southeast Asian Bull, Math., **19**(1)(1995), 49-54.
- [4] N.Nobusawa, *On generalization of the ring theory*, Osaka J. Math., **1**(1)(1964), 81-89
- [5] P.Corsini, V.Leoreanu, *Applications of hyperstructure theory*, Kluwr Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- [6] Pawar, Kishor & Patil, Jitendrasing & Davvaz, Bijan. (2019). *On regular Γ -semihyperring and idempotent Γ -semihyperring*. Kyungpook Mathematical Journal. 59. 35-45.
- [7] S. M. Anvariye, S. Mirvakilli and B. Davvaz, *On Γ -hyperideals in Γ -semihypergroups*, Carpathian J. Math., **26**(2010), 11-23.
- [8] S. Ostadhadi-Dehkordi and B. Davvaz, *Ideal theory in Γ -semihyperrings*, Iran. J. Sci. Tech. Trans. A Sci., **37**(3) (2013), 251-263.