Estimasi, Vol. 3, No. 1, Januari, 2022, Hal. 23-32
DOI: 10.20956/ejsa.vi.11406

Rancangan Faktorial Model Campuran Dengan Metode Maksimum Likelihood

Andi Tenri Riski Amalia[1*], **Raupong**[2*], dan **Andi Kresna Jaya**[3*]
[1,2,3]Departemen Statistika, Fakultas MIPA,
Universitas Hasanuddin, Makassar, 90245, Indonesia
***Corresponding author, email address: anditenririzkyam@gmail.com**

Abstract

Variance is the amount of statistics which measures how far a set of numbers in observation are spread out from its mean. In experimental design, variance are caused by the effect of treatment, block and error of experimental can be estimated by variability of error that commonly referred to variance component. In this study, the maximum likelihood method with Hartley Rou modification was used followed by the Newton Raphson method which was applied to a complete randomized block factorial design mixed model with factor A being fixed and factor B being random. The results of this study for rice production data showed that there is a significant effect on the interaction of genotype and location on rice production. The estimated value of the variance component obtained indicates that there are variations in the influence of location factors, and genotype and location interaction factors on rice production.

Keywords: *Factorial RAKL, Hartley-Rou, Likelihood Method, Maximum, Mixed Model, Variance Component*

Abstrak

Variansi merupakan besaran statistika yang menunjukkan seberapa jauh persebaran nilai observasi terhadap nilai rata-ratanya. Dalam rancangan percobaan, untuk mengetahui variansi dari pengaruh perlakuan, pengaruh kelompok, dan pengaruh galat percobaan dapat diestimasi dari variansi galat, disebut sebagai komponen variansi. Pada penelitian ini, digunakan metode maksimum likelihood dengan modifikasi Hartley Rou yang dilanjutkan dengan metode Newton Raphson yang diterapkan pada data rancangan acak faktorial kelompok lengkap model campuran dengan faktor A bersifat tetap dan faktor B bersifat acak. Hasil penelitian pada data hasil produksi padi menunjukkan terdapat pengaruh nyata interaksi genotipe dan lokasi teradap hasil produksi padi. Nilai estimasi komponen variansi yang diperoleh menunjukkan terdapat adanya keragaman pengaruh faktor lokasi dan faktor interaksi genotipe dan lokasi terhadap hasil produksi padi.

Kata Kunci: *Komponen Variansi, RAK Faktorial, Model Campuran, Metode Maksimum Likelihood*

1. Pendahuluan

Percobaan faktorial adalah percobaan yang dipengaruhi oleh beberapa faktor dan dicirikan dengan perlakuan yang merupakan kombinasi dari taraf-taraf faktor yang dicobakan [2]. Rancangan faktorial dengan Rancangan Acak Kelompok Lengkap (RAKL) merupakan percobaan faktorial dengan rancangan dasar RAKL, faktor yang digunakan terdiri dari dua faktor yaitu faktor A dengan a taraf, dan faktor B dengan b taraf, serta kedua faktor yang saling berinteraksi.

Variansi atau keragaman merupakan ukuran seberapa tersebarnya data. Semakin besar nilai variansi, maka semakin menyebar suatu data, begitupun sebaliknya. Dalam rancangan percobaan, untuk mengetahui variansi dari pengaruh perlkuan, pengaruh kelompok dan pengaruh galat percobaan dapat destimasi dari variansi galat yang bisa disebut sebagai komponen variansi [13].

Metode yang dapat diguakan dalam mengestimai komponen variansi diantaranya adalah Analisis Variansi (ANAVA), metode Maksimum Likelihood (MLE) dan Restricted Maksimum Likelihood (REML). Dalam kajian ini metode yang penulis gunakan adalah metode maksimum likelihood pada rancangan factorial RAKL model campuran dimana faktor A merupakan model tetap dan faktor B merupakan model acak. Karena kesulian dalam mengestimasi komponen variansi pada model campuran, maka penulis menggunakan modifikasi Hartley-Rou pada metode MLE [12]. Meskipun metode Hartley-Rou masih memerlukan usaha komputasi numeric, namun hasil estimasi komponen variansi selalu bernilai nonnegative sehingga penulis tertarik menggunakan metode maksimum likelihood dengan modifikasi Hartley Rou dalam mengestimasi komponen variansi pada rancangan factorial model campuran.

2. Material dan Metode

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder Hasil Produksi Padi yang dipengaruhi oleh 2 faktor yaitu faktor A (genotipe) dan faktor B (lokasi) yang diperoleh dari Balai Penelitian Tanaman Padi Sukamandi. Data ini merupakan data rancangan factorial dengan rancangan dasar RAKL model campuran dimana Faktor A bersifat tetap dan faktor B bersifat acak. Variable dalam penelitian ini terdiri dari 1 variabel respon dan 3 variabel bebas. Hasil Produksi Padi (ton/ha) sebagai variable respon, faktor genotipe, faktor lokasi dan kelompok sebagai variable bebas.

Metode yang digunakan dalam mengestimasi komponen variansi pada data rancangan factorial RAKL yaitu metode maksimum likelihood. Menurut Sudjana (2002) percobaan faktorial adalah percobaan yang semua perlakuan suatu faktor tertentu dikombinasikan atau disilangkan dengan semua perlakuan tiap faktor lainnya yang ada pada percobaan itu [11]. Percobaan faktorial dapat juga diaplikasikan terhadap seluruh unit-unit percobaan secara berkelompok. Hal ini dilakukan jika unit percobaan yang digunakan tidak homogen. Percobaan ini sering disebut percobaan dua faktor dalam RAKL. Adapun model linear aditif rancangan acak kelompok lengkap dua faktor adalah

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \rho_k + \varepsilon_{ijk} \tag{1}$$

y_{ijk} merupakan nilai pengamatan (respon) dari kelompok ke-k yang memperoleh perlakuan taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B, μ adalah rata-rata umum, α_i adalah pengaruh perlakuan taraf ke-i faktor A, β_j adalah pengaruh perlakuan taraf ke-j faktor B, $(\alpha\beta)_{ij}$ adalah pengaruh interaksi taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B, a adalah banyaknya taraf faktor A, b adalah banyaknya taraf faktor B, r adalah banyaknya kelompok, ρ_k adalah pengaruh kelompok ke-k (diasumsikan tidak berinteraksi dengan perlakuan), dan ε_{ijk} adalah galat percobaan taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B pada data kelompok ke-k ($\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$)

Beberapa model pada rancangan faktorial diantaranya adalah model tetap, model acak, dan model campuran. Jika faktor A dengan a taraf dan faktor B dengan b taraf tetap, maka disebut model tetap. Jika faktor A dengan a taraf dan faktor B dengan b taraf acak, maka disebut model acak. Sedangkan jika faktor A dengan a taraf tetap dan faktor B dengan b taraf acak atau sebaliknya disebut dengan model campuran.

Persamaan (2.1) dalam persamaan regresi dapat ditulis:

$$y = \mathbf{1}\mu + \boldsymbol{Z}_1\alpha + \boldsymbol{Z}_2\beta + \boldsymbol{Z}_3\alpha\beta + \boldsymbol{Z}_4\rho + \boldsymbol{Z}_0\varepsilon \tag{2}$$

μ adalah rataan umum yaitu rataan untuk keseluruhan data pengamatan. $\boldsymbol{Z}_0$ adalah matriks identitas yang berukuran $abr \times abr$, $\boldsymbol{Z}_i$ ($i = 1,2,3\ dan\ 4$) adalah matriks indikator yang berhubungan dengan kompenen variansi ke-i, $\boldsymbol{\varepsilon}$ adalah vektor galat yang berukuran $(abr \times 1)$, sedangkan $\boldsymbol{\alpha}$ adalah vektor efek tetap, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor efek acak yang terkait dengan komponen variansi ke-i.

Data yang digunakan dalam penelitian ini merupakan model campuran, menurut Ojeda & Sahai (2005) model linear dari model campuran dirumuskan sebagai berikut [6]:

$$\boldsymbol{y} = X\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{Z_1u_1} + \boldsymbol{Z_2u_2} + \cdots + \boldsymbol{Z_cu_c} + \boldsymbol{e} \tag{3}$$

Sebagai konsekuensi dari persamaan (2.3) maka:

$$y \sim N(\mu, V)$$

Dimana

$$\mu = E(\boldsymbol{y}) = X\boldsymbol{\delta}$$

Dan

$$V = Var(y) = \sigma_i{}^2\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t + \sigma_e{}^2 I = \sigma_e{}^2\boldsymbol{H} \tag{4}$$

Dengan

$$\boldsymbol{H} = \gamma_i\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t + I_{\boldsymbol{n}} \tag{5}$$

$$\gamma_i = \frac{\sigma_i{}^2}{\sigma_e{}^2} \tag{6}$$

$\boldsymbol{H}$ merupakan matriks ukuran $N \times N$, γ_i adalah parameter khusus yang akan dipakai dalam mengkonstruksi komponen varian pada metode maksimum likelihood, $\sigma_i{}^2$adalah komponen varian acak yang diperoleh dengan metode ANAVA, dan $\sigma_e{}^2$adalah komponen varian galat yang diperoleh dengan metode ANAVA.

Selanjutnya, metode yang digunakan dalam mengestimasi komponen varian yaitu metode maksimum likelihood. Maksimum likelihood adalah teknik yang sangat luas dipakai dalam penaksiran suatu parameter distribusi data dan tetap dominan dipakai dalam pengembangan uji-uji yang baru. Misalkan $L(\theta)$ adalah fungsi likelihood (fungsi dari parameter θ yang memaksimumkan fungsi likelihood.

Misalkan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ adalah peubah acak yang saling bebas dari populasi dengan fungsi kepadatan peluangnya dinyatakan oleh $f(y;\theta)$ dengan θ adalah parameter yang tidak diketahui yang merupakan parameter-parameter yang akan diduga, maka fungsi likelihoodnya adalah:

$$L(\theta) = L(\theta; y_1, y_2, \dots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i, \theta) \tag{7}$$

Fungsi log-likelihood dapat ditulis dalam bentuk:

$$I = \ln L(\theta) \tag{8}$$

Untuk memaksimumkan fungsi log-likelihood, diperoleh dengan cara menurunkan fungsi log-likelihood terhadap θ lalu disamakan dengan nol [3].

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln[L(\theta)] = 0 \tag{9}$$

Menurut (Rou, 1967), apabila langkah mengestimasi parameter menggunakan metode maksimum likelihood menghasilkan persamaan yang tidak eksplisit, maka untuk memperoleh nilai estimasi parameternya dapat digunakan metode Newton Raphson[8]. Persamaan likelihood dengan parameter θ dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus estimasi untuk parameter $\hat{\theta}$ pada iterasi ke - $(t+1)$ dalam proses iterasi yang dituliskan sebagai berikut :

$$\theta_{t+1} = \theta_t - \frac{f(\theta_t)}{f'(\theta_t)}, \qquad f'(\theta_t) \neq 0 \tag{10}$$

Dengan θ_{t+1} adalah akar persamaan dari $f(\theta_t)$ iterasi ke-$(t+1)$; θ_t adalah akar persamaan dari $f(\theta_t)$ iterasi ke t dan $f'(\theta_t)$ adalah turunan dari $f(\theta_t)$.

Proses iterasi dengan menggunakan metode Newton Raphson sehingga didapatkan nilai $\hat{\theta}$ yang konvergen yaitu sampai nilai $\left|\frac{\hat{\theta}_{t+1} - \hat{\theta}_t}{\hat{\theta}_{t+1}}\right| < \varepsilon$, dengan ε adalah toleransi galat yang diinginkan [4].

3. Hasil dan Diskusi

3.1 Model Rancangan Percobaan Faktorial dengan RAKL dalam Persamaan Regresi

Model linear dari rancangan percobaan faktorial dengan RAKL pada Persamaan (1) diterapkan pada data Lampiran 1, diketahui bahwa taraf faktor A (genotipe) $= 7$, taraf faktor B (lokasi) $= 4$, dan taraf kelompok $= 3$ dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{ijk} =; \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \rho_k + \varepsilon_{ijk};\ i = 1,2,\dots,7\ j = 1,2,\dots,4\ \ k = 1,2,3 \tag{11}$$

y_{ijk} merupakan nilai pengamatan hasil produksi padi dari kelompok ke-k yang memperoleh perlakuan taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B, μ merupakan rata-rata umum, α_i merupakan pengaruh perlakuan taraf ke-i faktor A, β_j pengaruh perlakuan taraf ke-j faktor B, $(\alpha\beta)_{ij}$ merupakan pengaruh interaksi taraf ke-i faktor A dan taraf ke-

j faktor B, ρ_k merupakan pengaruh kelompok ke-k dan ε_{ijk} merupakan Galat percobaan taraf ke-i faktor A dan taraf ke-j faktor B pada data kelompok ke-k

Karena rancangan faktorial RAKL yang digunakan adalah model campuran dengan faktor A sebagai model tetap dan faktor B sebagai model acak, maka Persamaan (11) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\delta} + \boldsymbol{Z_1\beta} + \boldsymbol{Z_2}(\boldsymbol{\alpha\beta}) + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{12}$$

$\boldsymbol{y}$ merupakan vektor respon berukuran 84×1, $\boldsymbol{X}$ merupakan matriks berukuran 84×7, $\boldsymbol{\delta}$ merupakan vektor dari parameter tetap berukuran 7×1, $\boldsymbol{Z_1}$ merupakan matriks berukuran 84×4, $\boldsymbol{Z_2}$ merupakan matriks berukuran 84×28, $\boldsymbol{\beta}$ merupakan vektor acak berukuran 4×1, $\boldsymbol{\alpha\beta}$ merupkan vektor acak berukuran 28×1, $\boldsymbol{\varepsilon}$ merupakan vektor galat pengamatan berukuran 84×1

3.2 Estimasi Komponen Varian dengan Metode Maksimum Likelihood

Fungsi likelihood dengan asumsi berdistribusi normal dengan parameter $\boldsymbol{\delta}$ dan ${\sigma_e}^2\boldsymbol{H}$ untuk Persamaan (7) sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\delta}, {\sigma_e}^2\boldsymbol{H}\,;\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi{\sigma_e}^2\,)^{n/2}|\boldsymbol{H}|^{1/2}}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})}{2{\sigma_e}^2}\right] \tag{13}$$

Untuk memaksimumkan nilai fungsi $L(\boldsymbol{\delta}, {\sigma_e}^2\boldsymbol{H}\,;\boldsymbol{y})$ dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi log-likelihoodnya. Misalkan l merupakan fungsi log likelihood dari persamaan (4.1), maka:

$$\begin{aligned} l &= \ln(L(\boldsymbol{\delta}, {\sigma_e}^2\boldsymbol{H}\,;\boldsymbol{y}) \\ &= -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln({\sigma_e}^2) - \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{H}| - \frac{1}{2{\sigma_e}^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \end{aligned} \tag{14}$$

Untuk memaksimumkan l, fungsi tersebut diturunkan terhadap parameternya $(\boldsymbol{\delta}, {\sigma_e}^2, \gamma_i)$ kemudian disamakan dengan nol.

a. Turunan terhadap $\boldsymbol{\delta}$

$$\begin{aligned} l_\delta &= \left.\frac{\partial l}{\partial \boldsymbol{\delta}}\right|_{\delta=\hat{\delta}} \\ &= \frac{1}{{\sigma_e}^2}[\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{X\delta}] \end{aligned}$$

Selanjutnya, hasil turunan disamakan dengan nol

$$l_\delta = \frac{1}{{\sigma_e}^2}[\boldsymbol{X}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{X\delta}] = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \left(\boldsymbol{X}^t\hat{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^t\hat{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{15}$$

b. Turunan l terhadap ${\sigma_e}^2$

$$\begin{aligned} l_{{\sigma_e}^2} &= \frac{\partial l}{\partial {\sigma_e}^2} \\ &= -\frac{n}{2{\sigma_e}^2} + \frac{1}{2{\sigma_e}^4}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \end{aligned}$$

Selanjutnya, hasil turunan fungsi disamakan dengan nol,

$$l_{\sigma_e{}^2} = -\frac{n}{2\sigma_e{}^2} + \frac{1}{2\boldsymbol{\sigma_e}^{\mathbf{4}}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) = 0$$

$$\widehat{\sigma_e{}^2} = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \tag{16}$$

c. Turunan l terhadap γ_i

$$\begin{aligned} l_{\gamma_i} &= \frac{\partial l}{\partial \gamma_i} \\ &= -\frac{1}{2}\,tr\left(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\right) + \frac{1}{2\sigma_e{}^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \end{aligned} \tag{17}$$

Selanjutnya, hasil turunan fungsi disamakan dengan nol.

$$\boldsymbol{l}_{\gamma_i} = -\frac{1}{2}\,tr\left(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\right) + \frac{1}{2\sigma_e{}^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) = 0$$

$$\frac{1}{2}\,tr\left(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\right) = \frac{1}{2\sigma_e{}^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \tag{18}$$

Persamaan (18) tidak dapat diselesaikan secara analitik untuk mendapatkan hasil yang eksplisit dari estimator γ_i. Namun, persamaan (18) dapat diselesaikan secara numerik dengan prosedur Newton-Raphson.

Adapun turunan parsial kedua dari fungsi Log-Likelihood l terhadap γ yang selanjutnya digunakan untuk prosedur iterasi Newton Raphson yaitu sebagai berikut :

$$\begin{aligned} l_{\gamma_i\gamma_i} &= \frac{\partial^2 l}{\partial\gamma_i\partial\gamma_i} \\ &= \frac{1}{2}\,tr\left(\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\right) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma_e{}^2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta})^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\boldsymbol{Z}_i{}^t\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\delta}) \end{aligned} \tag{19}$$

Selanjutnya dilakukan proses iterasi dilakukan untuk memperoleh nilai $\widehat{\gamma_i}$ yang konvergen.

$$\widehat{\gamma_i}_{t+1} = \widehat{\gamma_i}_t - \frac{l_{\gamma_i}}{l_{\gamma_i\gamma_i}} \tag{20}$$

3.3 Penerapan pada Data

3.3.1 Pengujian Asumsi Rancangan

1. Uji normalitas

Uji yang digunakan untuk mengetahui apakah data menyebar secara normal yaitu uji Liliefors. Dalam uji ini data terlebih dahulu disusun dari yang terkecil ke yang terbesar. Berdasarkan prosedur diperoleh nilai $L_0 = 0{,}0798$ sedangkan nilai $L_{(0.05,84)}$ sebesar 0,0967. Karena $L_0 = 0{,}0798 < L_{(0.05,84)} = 0{,}0967$. Maka data itu dapat disimpulkan bahwa H_0 diterma yang artinya data berdistribusi normal.

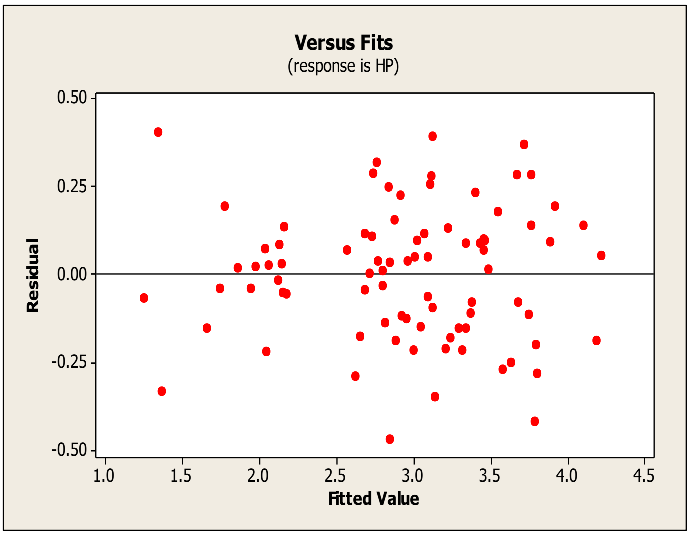
2. Kehomogenan variansi

Uji yang digunakan untuk memeriksa asumsi kehomogenan galat adalah uji Barlet. Hasil perhitungan χ^2_{hit} diperoleh $\chi^2_{hit} = 2.458$. nilai ini kemudian dibandingkan dengan nilai χ^2_{tabel} dengan $v = 2$ dan $\alpha = 0.05$, diperoleh $\chi^2_{(2;0.05)} = 5.9915$. Karena $\chi^2_{hit} <$

$\chi^2_{(2;0.05)}$ yaitu $2.458 < 5.9915$, maka H_0 diterima, bahwa asumsi kehomogenan variansi terpenuhi.

3. Kebebasan galat

   Plot antara nilai sisaan dan nilai dugaan pengamatan ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Plot antara nilai sisaan dan nilai dugaan

Pada Gambar 1. dapat dilihat bahwa titik-titik galat menyebar secara acak atau tidak membentuk pola sehingga dapat disimpulkan bahwa asumsi kebebasan galat terpenuhi.

3.3.2 Hipotesis

Hipotesis yang akan diuji sebagai berikut:

a. Pengaruh utama faktor A

   $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_7 = 0$ (ada faktor A atau genotipe tidak berpengaruh terhadap respons atau hasil produksi padi yang diamati)

   $H_1: \exists \alpha_i \neq 0, i = 1,2,\ldots,7$ (ada faktor A atau genotipe berpengaruh terhadap respons atau hasil produksi padi yang diamati)

b. Pengaruh utama faktor B

   $H_0: \sigma^2_\beta = 0$ (tidak ada keragaman antar taraf faktor B)

   $H_1: \sigma^2_\beta > 0$ (ada keragaman antar faktor B)

c. Pengaruh interaksi faktor A dan faktor B

   $H_0: \sigma^2_{\alpha\beta} = 0$ (tidak ada keragaman antar taraf faktor interaksi AB)

   $H_1: \sigma^2_{\alpha\beta} > 0$ (ada keragaman antar faktor interaksi AB)

Sebagai kaidah keputusan untuk uji hipotesis adalah tolak H_0 jika $F_{hit} > F_{\alpha(v_1,v_2)}$

3.3.3 Perhitungan ANAVA

Tabel 1. Hasil Perhitungan Analisis Variansi pada Data Hasil Produksi Padi

Sumber Variansi	Db	JK	KT	F_{hit}	F_{tab}
A	6	10,245	1,708	1,324	2,66
B	3	5,089	1,696	31,407	2,798
AB	18	23,213	1,290	23,889	1,823
Kelompok	2	0,198	0,099	1,833	3,168
Galat	54	2,94	0,054		
Total	83	41,686			

Sumber: Hasil Olahan, 2020

Berdasarkan hipotesis dengan menggunakan $\alpha = 0{,}05$, kesimpulan yang diperoleh sebagai berikut:

1. Nilai $F_{hitung}(A) = 1{,}324 < F_{tabel} = 2{,}66$ sehingga H_0 diterima yang berarti tidak terdapat pengaruh nyata genotipe terhadap hasil produksi padi
2. Nilai $F_{hitung}(B) = 31{,}047 > F_{tabel} = 2{,}798$ sehingga H_0 ditolak yang berarti terdapat pengaruh nyata lokasi terhadap hasil produksi padi
3. Nilai $F_{hitung}(AB) = 23{,}882 > F_{tabel} = 1{,}823$ sehingga H_0 ditolak yang berarti terdapat pengaruh nyata interaksi antara genotipe dan lokasi terhadap hasil produksi padi

3.3.4 Estimasi Komponen Varian pada Rancangan Faktorial Acak Kelompok

Berdasarkan data pada lampiran 1 adalah data faktorial RAKL model campuran dengan faktor genotipe sebagai model tetap dan faktor lokasi sebagai model acak sehingga Persamaan (12) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\delta} + \boldsymbol{Z_1\beta} + \boldsymbol{Z_2(\alpha\beta)} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Selanjutnya berdasarkan persamaan (2.8) dan (2.9), dipelroleh:

$$\boldsymbol{H} = \gamma_1 \boldsymbol{Z}_1 \boldsymbol{Z}_1{}^t + \gamma_2 \boldsymbol{Z}_2 \boldsymbol{Z}_2{}^t + I_{\boldsymbol{48}} \tag{21}$$

$$\gamma_1 = \frac{\sigma_\beta{}^2}{\sigma_e{}^2}\ dan\ \gamma_2 = \frac{\sigma_{\alpha\beta}{}^2}{\sigma_e{}^2} \tag{22}$$

dengan $\sigma_\beta{}^2, \sigma_{\alpha\beta}{}^2, dan\ \sigma_e{}^2$ merupakan komponen varian yang akan ditaksir dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Nilai taksiran untuk komponen variannya berdasarkan Persamaan (4), (5), dan (6) sebagai berikut:

$$\sigma_\varepsilon^2 = KTG = 0{,}054 \tag{23}$$

$$\sigma_\beta^2 = \frac{1}{ar}[KTB - \sigma_\varepsilon^2] = \frac{1}{7(3)}[1{,}696 - 0{,}054] = 0{,}078 \tag{24}$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^2 = \frac{1}{r}[KTAB - \sigma_\varepsilon^2] = \frac{1}{3}[1{,}290 - 0{,}054] = 0{,}412 \tag{25}$$

Berdasarkan persamaan (23), (24), dan (25) diperoleh matriks $\boldsymbol{H}$ sesuai persamaan (21) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{H} = 1{,}444\ \boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_1{}^t + 7{,}629\ \boldsymbol{Z}_2\boldsymbol{Z}_2{}^t + I_{\mathbf{84}}$$

dengan $\boldsymbol{Z}_1$ dan $\boldsymbol{Z}_2$ merupakan kontruksi matriks.

Berdasarkan output program MATLAB diperoleh nilai penduga komponen varian pada rancangan faktorial acak kelompok dengan metode maksimum likelihood, yaitu $\tilde{\sigma}_e{}^2 = 0{,}3644, \tilde{\sigma}_\beta{}^2 = 0{,}069\ ,\ dan\ \tilde{\sigma}_{\alpha\beta}{}^2 = 0{,}46$

Selanjutnya, kesimpulan yang diperoleh sebagai berikut:

a. Nilai $\tilde{\sigma}_\beta{}^2$ yang diperoleh yaitu $0{,}069 > 0$ sehingga H_0 ditolak yang berarti terdapat keragaman antar faktor B. Artinya, terdapat pengaruh nyata antara faktor lokasi terhadap hasil produksi padi.

b. Nilai $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}{}^2$ yang diperoleh yaitu $0{,}46 > 0$ sehingga H_0 ditolak yang berarti terdapat keragaman antar interaksi faktor A dan faktor B. Artinya, terdapat pengaruh nyata interaksi antara faktor genotipe dan lokasi terhadap hasil produksi padi.

4. Kesimpulan

Estimasi komponen varian pada data hasil produksi padi dengan metode maksimum *likelihood* yang diperoleh adalah nilai variansi pengaruh galat percobaan $\tilde{\sigma}_e{}^2 = 0{,}3644$, variansi pengaruh faktor lokasi $\tilde{\sigma}_\beta{}^2 = 0{,}069$, dan variansi pengaruh faktor interaksi genotipe dan lokasi $\tilde{\sigma}_{\alpha\beta}{}^2 = 0{,}46$. Berdasarkan hipotesis terhadap rancangan faktorial acak kelompok, tidak terdapat pengaruh nyata genotipe terhadap hasil produksi padi, terdapat pengaruh nyata lokasi terhadap hasil produksi padi, dan terdapat pengaruh nyata interaksi antara genotipe dan lokasi terhadap hasil produksi padi.

Penelitian selanjutnya dapat dilakukan kajian tentang estimasi komponen varian pada rancangan faktorial acak kelompok tidak lengkap dan menggunakan metode lain seperti metode *restricted maximum likelihood.*

Daftar Pustaka

[1] Gasperz, V. *Metode Perancangan Percobaan.* Bandung: CV. ARMICO, 1991.

[2] Mattjik, A. d. *Perancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan Minitab (Jilid I Edisi Kedua).* Bogor: IPB-Press. 2000.

.[3] Montgomery, D. *Design and Analysis of Experiments, fifth Edition.* John Wilson & Sons. 2001.

[4] Munir, R. *Metode Numerik.* Bandung: Informatika Bandung. 2008.

[5] Nuryadi, Astuti, T. D., Utami, E. S., & Budiantara, M. *Dasar-Dasar Statistik Penelitian.* Yogyakarta: Sibuku Media. 2017.

[6] Ojeda, M. M., & Sahai, H. *Analysis of Variance for Random Models.* USA: Birkhauser Boston. 2005.

[7] Prihartini, R. R. *Mixed Additive Main Effect and Multiplicative Interaction (M-AMMI) dan Aplikasinya.* Yogyakarta: Univrsitas Negeri Yogyakarta. 2011.

[8] Rou, H. O. Maximum-likelihood Estimation for The Mixed Analysis of Variance. *Biometrics*, 93-108, 1967.

[9] Sahid. *Analisis dan Implementasi Metode Newton Raphson.* Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta. 2002.

[10] Searle. *Variance Component.* New York: John Wiley & Sons. 2002.

[11] Sudjana. *Desain dan Analisis Eksperimen (edisi IV).* Bandung: Tarsito. 2002.

[12] Usman, L. *Estimasi Komponen Varian Pada Rancangan Acak Kelompok.* Makassar: Dept Statistik, Universitas Hasanudin. 2016.

[13] Wahyuni, S. *Estimasi Komponen Varian pada Rancangan Petak Terbagi dalam Rancangan Acak Lengkap dengan Metode Maximum Likelihood.* Makassar: Universitas Hasanuddin. 2015.