ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 6, No.1, 44-48, Juli 2009

Penentuan Daerah Kritis Terbaik dengan Teorema Neyman- Pearson

Georgina M. Tinungki *

Abstrak

Terdapat beberapa metode untuk membangun uji statistik yang baik, diantaranya adalah Teorema Neyman Pearson yang diawali dengan menguji hipotesis sederhana H_0 melawan hipotesis alternatif H_1. Sebelum kita mendefinisikan suatu uji terbaik, suatu observasi harus dibuat. Tentu uji tersebut menetapkan suatu daerah kritis, atau dengan kata lain suatu pilihan atas suatu daerah kritis menggambarkan suatu uji.

Kata Kunci : *Teorema Neyman-Pearson, uji terbaik, daerah kritis.*

1. Pendahuluan

Dalam mengambarkan uji terbaik, satu observasi yang penting yang harus dibuat, yaitu suatu uji penetapan daerah kritis atau suatu pilihan dari gambaran daerah kritis suatu uji. Sebagai contoh, jika diberikan satu daerah kritis C={(x_1, x_2, x_3); $x_1^2+x_2^2+x_3^2 \geq 1$} uji terbaik ditentukan. Dalam uji tersebut, ada tiga variabel random X_1, X_2, X_3 yang perlu dipertimbangkan. Misalkan nilai pengamatan x_1, x_2, x_3, maka H_0 diterima jika $x_1^2+x_2^2+x_3^2 < 1$, dan ditolak untuk H_0 lainnya. Ini adalah bentuk "uji" dan "daerah kritis" yang keduanya dapat dipertukarkan. Jika digambarkan suatu daerah kritis yang baik, maka akan tergambar suatu uji yang baik.

Andaikan $f(x;\theta)$ menyatakan pdf dari suatu variable random X. Andaikan X_1, X_2, X_3 menyatakan suatu sampel random dari distribusi ini, dan andaikan dua hipotesis sederhana:

$$H_0 : \theta = \theta' \text{ dan } H_1 : \theta = \theta'',$$

maka $\Omega = (\theta;\ \theta = \theta', \theta'')$. Sekarang akan digambarkan suatu daerah kritis terbaik sekaligus suatu uji terbaik, untuk pengujian hipotesis sederhana H_0 lawan alternatifnya hipotesis sederhana H_1.

Dalam definisi ini symbol-simbol $P_r[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C; H_0]$ dan $P_r[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C; H_1]$ berarti $P_r[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C]$ ketika, berturut-turut, H_0 dan H_1 adalah benar.

2. Teorema Neyman-Pearson

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dimana n adalah bilangan bulat positif, suatu sampel acak dari suatu distribusi yang mempunyai p.d.f. $f(x;\theta)$, sehingga joint p.d.f dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah $L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1;\theta)\, f(x_1;\theta) \ldots f(x_n;\theta)$. θ' dan θ'' nilai tetap beda dari θ sehingga sehingga $\Omega = \{\theta : \theta = \theta', \theta''\}$, dan k adalah nilai positif. C subset dari ruang sampel sedemikian sehingga:

a. $\frac{L(\theta'; x1,x2,\ldots,xn)}{L(\theta''; x1,x2,\ldots,xn)} \leq k$, *untuk masing-masing titik* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$
b. $\frac{L(\theta'; x1,x2,\ldots,xn)}{L(\theta''; x1,x2,\ldots,xn)} \geq k$, untuk masing-masing titik $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C$
c. $A = Pr\,[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C; H_0]$

* *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

Kemudian C adalah daerah kritis terbaik dari ukuran α untuk menguji hipotesis sederhana $H_0 : \theta = \theta'$ lawan suatu hipotesis alternative $H_1 : \theta = \theta''$. Jika terdapat $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suatu sampel acak dari suatu distribusi yang mempunyai pdf

$$F(x;\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right), \quad -\infty < x < \infty.$$

Ini diinginkan untuk menguji hipotesis sederhana $H_0 : \theta = \theta' = 0$ melawan hipotesis tandingan $H_1 : \theta = \theta'' = 1$. Sekarang

$$\frac{L(\theta' ; x1, x2, \ldots, xn)}{L(\theta'' ; x1, x2, \ldots, xn)} = \frac{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\right) \exp\left(\frac{-(\sum_1^n xi^2)}{2}\right)}{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n\right) \exp\left(\frac{-(\sum_1^n (xi-1)^2)}{2}\right)}$$

$$= \exp\left(-\sum_1^n (xi + \frac{n}{2}) \right).$$

Jika $k > 0$,

$$\exp\left(-\sum_1^n (xi + \frac{n}{2}) \right) \leq k,$$

ini adalah daerah ktiris terbaik. Ketaksamaan ini bertahan jika dan hanya jika

$$-\sum_1^n xi + \frac{n}{2} \leq \ln k \quad \text{ekivalen} \quad \sum_1^n xi \geq \frac{n}{2} - \ln k = c.$$

Pada kasus ini, daerah kritis terbaik adalah set $C = \{(x1, x2, \ldots, xn) : \sum_1^n xi \geq c\}$, dimana c adalah konstanta yang dapat ditentukan sehingga ukuran dari daerah kritis adalah nilai yang diinginkan α, dengan $c_i = c/\sqrt{n}$. Jika H_0 benar dimana $\theta = \theta' = 0$, maka $\bar{X}$ mempunyai distribusi $N(0.1/n)$. Untuk n bilangan bulat positif, ukuran sampel dan level signifikansi α yang diberikan, nilai c_1 dapat ditentukan dari tabel distribusi Normal sehingga diperoleh $\Pr(\bar{X} \geq c_{1;}\ H_0) = \alpha$. Akibatnya jika nilai percobaan dari $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ada, begitupula $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kita dapat menghitung

$$\bar{x} = \sum_1^n xi/n .$$

Jika $\bar{x} \geq c_1$, hipotesis $H_0 : \theta = \theta' = 0$ akan ditolak pada level signifikansi α. Jika $\bar{x} < c_1$, hipotesis $H_0 : \theta = \theta' = 0$ akan diterima. Peluang penolakan H_0 ketika H_0 benar adalah α. Peluang penolakan H_0 ketika H_0 salah, adalah nilai dari uji pada $\theta = \theta' = 1$, yaitu

$$\Pr(\bar{X} \geq c_{1;}\ H_1) = \int_{c1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/n}} \exp\left[-\frac{(\bar{x}-1)^2}{2(1/n)}\right] d\bar{x}.$$

Sebagai contoh, jika $n = 25$ dan jika $\alpha = 0.05$, kemudian dari tabel distribusi normal kita mendapatkan

$$c_1 = 1.645/\sqrt{25} = 0.329,$$

sehingga nilai dari uji terbaik ini dari H_0 melawan H_1 adalah 0.05, ketika H_0 benar dan

$$\int_{0.329}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1/25}} \exp\left[-\frac{(\bar{x}-1)^2}{2(25)}\right] d\bar{x} = \int_{-3.355}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{w^2/2} dw = 0.999$$

jika H_1 benar.

Definisi 1.

Andaikan C menyatakan suatu himpunan bagian dari ruang sampel maka C disebut daerah kritis terbaik berukuran α untuk uji hipotesis sederhana $H_0 : \theta = \theta'$ melawan hipotesi alternatif s sederhana $H_1 : \theta = \theta''$, jika untuk setiap himpunan bagian A dari ruang sampel dimana

$$P_r[(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n) \in A; H_0] = \alpha :$$

(a) $P_r[(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n) \in C; H_0] = \alpha$
(b) $P_r[(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n) \in C; H_1] \geq P_r[(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_n) \in A; H_1]$

Definisi di atas pada hakekatnya mengikuti asumsi pertama bahwa H_0 adalah benar. Secara umum akan ada suatu keseragaman dari himpunan bagian *A* dari ruang sampel sedemikian hingga $P_r[(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in A] = \alpha$. Perkiraan terdapat satu himpunan bagian, katakan *C*, sedemikian bilamana H_1 adalah benar, kekuatan dari uji yang berhubungan dengan *C* adalah lebih kecil dari kekuatan uji yang berhubungan dengan satu sama lain *A*, maka *C* menggambarkan daerah kritis terbaik berukuran α untuk uji H_0 lawan H_1.

Dalam kasus berikut akan diuji definisi secara detail dalam kesamaan dan dalam kasus yang sangat sederhana.

3. Penerapan Dalam Berbagai Kasus

Apabila dimisalkan $X_1, \ldots, Xn$ peubah acak bebas masing-masing seragam pada $(0,\theta)$, θ tidak diketahui, $\theta \in \Theta = \{z, z > 0\}$. Maka dapat ditentukan uji paling kuasa bertaraf α = 0,05 untuk $H_0 : \theta = 1$ lawan $H_1 : \theta = 2$.

Untuk H_0:

$$\boldsymbol{f(x|\theta = 1)} = \begin{cases} 1, \text{ jika } 0 \leq \min(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \leq \text{maks}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \leq 1 \\ 0, \text{ lainnya} \end{cases}$$

Untuk H_1:

$$\boldsymbol{f(x|\theta = 2)} = \begin{cases} 1, \text{ jika } 0 \leq \min(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \leq \text{maks}(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \leq 1 \\ 0, \text{ lainnya} \end{cases}$$

Dalam Tabel 1 diberikan penentuan daerah kritis dalam beberapa kasus.

Tabel 1. Beberapa kasus dalam menentukan daerah kritis.

Kasus	$\boldsymbol{f(x\|\theta = 1)}$	$\boldsymbol{f(x\|\theta = 2)}$
1. min $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n < 0$	0	0
2. min $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \geq 0$ dan maks $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \leq 1$	1	$\frac{1}{2^n}$
3. min $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \geq 0$ dan 1 < maks $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) \leq 2$	0	$\frac{1}{2^n}$
4. min $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \geq 0$ dan 2 < maks $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$	0	0

Selanjutnya perhatikan tabel berikut jika $f(x|\theta = 2)$ lawan $kf(x|\theta = 1)$, maka ada beberapa kemungkinan yang bisa terjadi sebagaimana digambarkan pada tabel berikut.

Tabel 2. Beberapa kasus khusus.

Kasus	$\boldsymbol{f(x\|\theta = 2) > kf(x\|\theta = 1)}$	$\boldsymbol{f(x\|\theta = 2) = kf(x\|\theta = 1)}$	$\boldsymbol{f(x\|\theta = 2) < kf(x\|\theta = 1)}$
1	Tidak mungkin	Selalu	Tidak mungkin
2	Jika k < $\frac{1}{2^n}$	Jika k = $\frac{1}{2^n}$	Jika k > $\frac{1}{2^n}$
3	Selalu	Tidak mungkin	Tidak mungkin
4	Tidak mungkin	Selalu	Tidak mungkin

$P_{\theta=1}$ [Kasus 1, atau kasus 2, atau kasus 4] = 0

$$E_{\theta=1}\phi_1(X) = \gamma P_{\theta=1}[\text{kasus 2}] + P_{\theta=1}[\text{kasus 1, kasus 3, atau kasus 4}]$$
$$= \gamma + 1 + 0 = \gamma$$

Karena itu, pilihan $\gamma = \alpha = 0.05$.
Jadi suatu uji bertaraf $\alpha = 0.05$ yang paling kuasa untuk $Ho : \theta = 1$ dan $H_1 : \theta = 2$ diberikan oleh :

$$\phi_1(X) = \begin{cases} 0{,}05, \text{ jika min } (x_1,\ldots,x_n) \geq 0 \text{ dan maks } (x_1,\ldots,x_n) \leq 1 \\ 1 \text{ selainnya} \end{cases}$$

Fungsi kuasa uji ini dihitung sebagai berikut.
Untuk $0 < \theta \leq 1$:

$$E_{\theta=1}\phi_1(X) = 0{,}05\, P_\theta[\min(X_1,\ldots,X_n) \geq 0 \text{ dan maks } (X_1,\ldots,X_n) \leq 1]$$
$$+ P_\theta[\min(X_1,\ldots,X_n) \geq 0 \text{ dan maks}(X_1,\ldots,X_n) \leq 1]$$
$$= (0{,}05)(1) + (0{,}05)(1) = 0{,}05.$$

Untuk $1 < \theta$:

$$E_{\theta=1}\phi_1(X) = 0{,}05\, P_\theta[\min(X_1,\ldots,X_n) \geq 0 \text{ dan maks } ((X_1,\ldots,X_n) \leq 1]$$
$$+ P_\theta[\min(X_1,\ldots,X_n) \geq 0 \text{ dan maks}(X_1,\ldots,X_n) \leq 1]$$
$$= (0{,}05)(1/\theta)^n + 1.(1-(1/\theta)^n) = 1- 0{,}95/\theta.$$

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan terlihat bahwa inti persoalan dari pencarian uji paling kuasa bertaraf α terletak pada penentuan suatu daerah kritis C sedemikian rupa sehingga daerah itu mempunyai peluang α bila H_0 benar, dan tidak ada daerah lain (yang juga mempunyai peluang α bila H_0 benar) yang dapat mempunyai peluang yang lebih besar daripada peluang C' bila H_1 benar, sehingga jika kita mendefinisikan suatu daerah kritis terbaik maka kita juga dapat mendefenisikan suatu uji terbaik.

Daftar Pustaka

[1] Dudewicz, E.J., Mishra, S.N., 1988, *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, Ltd. Inc.

[2] Hogg, R.V. dan Craig, A.T., 1995, *Introduction to Mathematical Statistics,* Fifth Edition, Prentice Hall.

[3] Bain, L.J. dan Engelhardt, M., 1992, *Introduction to Probability and Mathematical Statistics,* Second Edition, Duxbury Press, An Imprint of Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

[4] Casella, G. dan & Berger, R.L., 1990, *Statistical Inference,* Wadsworth Inc., Belmont, California.