J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 14, No. 1, 100-105, Juli 2017

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Generalisasi Permainan Wythoff ke Permainan Tribonacci

Loeky Haryanto[1], Rahmaniah Rakhman[2], Arnensih Alimuddin[3]

Abstrak

Kata fibonacci bisa diturunkan dengan menggunakan suatu iterasi morfisma pada monoid $\{a, b\}^*$. Dengan mengidentifikasi posisi kedua huruf a dan b di dalam kata fibonacci, diperoleh barisan $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ yang membentuk posisi-P dari permainan Wythoff. Demikian pula, kata tribonacci bisa diturunkan dengan menggunakan suatu iterasi morfisma pada monoid $\{a, b, c\}^*$. Dengan mengidentifikasi ketiga huruf a, b dan c di dalam kata tribonacci, diperoleh barisan $(A_n, B_n, C_n)_{n\geq 0}$ yang membentuk posisi-P dari suatu permainan yang ditulis oleh [2]**Error! Reference source not found.** dan diberi nama: permainan tribonacci. Selain menggunakan morfisma, kedua barisan $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ dan $(A_n, B_n, C_n)_{n\geq 0}$ bisa dikonstruksi secara rekursif dengan menggunakan operator Mex (*Minimum excluded*). Berdasarkan parameterdan persyaratan yang digunakan pada kedua konstruksi, disimpulkan bahwa barisan $(A_n, B_n, C_n)_{n\geq 0}$ merupakan perluasan dari barisan urutan-2 $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$. Tetapi ada masalah perluasan cara konstruksi posisi-P permainan Wythoff berdasarkan barisan Beatty ke cara yang serupa untuk konstruksi posisi-P permainan tribonacci.

Kata Kunci: Morfisma, barisan fibonacci, permainan Wythoff, permainan tribonacci, posisi-P.

Abstract

The fibonacci word can be derived by iterating a morphism onmonoid $\{a, b\}^*$. Identifying the positions of the two letters a dan b in this word leads to a construction of a sequence $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ which constitutes the P-positions of Wythoff game.Likewise, the tribonacci word can be derived by iterating a morphism onmonoid $\{a, b, c\}^*$. Identifying the positions of the three letters a, b dan c in this word leads to a construction of a sequence $(A_n, B_n, C_n)_{n\geq 0}$ which constitutes the P-positions of a game proposed by [2] who called the game: tribonacci game. Besides using morphisms, both sequence can be constructed using the operator Mex (*minimum excluded*). Based on parameters and conditions used in both constructions, it is concluded that the sequence of triples $(A_n, B_n, C_n)_{n\geq 0}$ is a generalization of the sequence of pairs $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$. However, there is a problem generalizing Beatty-sequence method of construction the P-positions for Wythoff case to a similar method for tribonacci case.

Keywords: *Morphism, fibonacci sequence, Wythoff game, tribonacci game, P-positions.*

[1] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, email: Lukih2006gmail.com*
[2] *Guru Bidang Matematika, SD Negeri Sudirman Makassar, email : Rahmaniah.Rakhman@yahoo.com*
[3] *Mahasiswa Program Matematika Fakultas Pasca Sarjana Universitas Hasanuddin, email : arnensih@yahoo.co.id*

1. Pendahuluan

Permainan kombinatorik (*combinatorial games*) selalu dimainkan oleh dua orang pemain yang secara bergantian melakukan langkah-langkah untuk merubah posisi permainan sampai salah satu pemain kalah, yaitu tak bisa melanjutkan dengan suatu langkah sahih, langkah yang sesuai aturan permainan.

Ciri lain dari permainan kombinatorik adalah, terdapat himpunan posisi-posisi yang masing-masing disebut posisi-*P* sedemikian hingga jika posisi permainan berada pada posisi-*P*, maka pemain yang mengerjakan langkah sebelumnya (*Previous move*) bisa memaksakan permainan ke posisi-*P* dan sebaliknya dari posisi-*P*,seorang pemain yang akan melakukan langkah berikutnya (*Next move*) tak bisa merubah posisi-*P* tersebut ke posisi-*P* yang lain, apa pun langkah sahih yang dipilih. Posisi yang bukan posisi-*P* disebut posisi-*N*.

Salah satu posisi-*P*a dalah posisi-*P* mati, di mana pemain yang mendapat giliran melangkah setelah posisi-*P* mati ini tak bisa lagi melangkah apa pun dan harus menyerah kalah. Suatu permainan kombinatorik dikatakan bisa terselesaikan (*solved*) jika semua posisi-*P* dari permainan bisa diperoleh.

Permainan tribonacci diilhami oleh permainan *Wythoff* yang sudah ada lebih dari satu abad sebelumnya. Menurut berbagai sumber (misalnya [1], hal. 41 dan 52), permainan yang diperkenalkan oleh Wythoff pada tahun 1907 tersebut merupakan pengembangan dari suatu permainan NIM, permainan yang posisi-*P*-nya disajikan oleh bilangan-bilangan biner dari posisi permainan. Semua permainan yang disebut di atas termasuk dalam kelompok permainan kombinatorik.

Pada Bagian **Error! Reference source not found.** berikut, dibahas aturan permainan Wythoff dan permainan tribonacci. Di bagian ini, para pembaca dianggap sudah mengenal konsep untaian atas suatu alfabet (*string over an alphabet*) Σ, termasuk konsep Σ^*sebagai *monoid* atau *semigroup* dan konsep morfisma yang terdefinisi pada Σ^*. Pada Bagian **Error! Reference source not found.**, dibahas solusi dari permainan Wythoff sedangkan pada Bagian **Error! Reference source not found.**, dibahas solusi permainan tribonacci. Bagian **Error! Reference source not found.** berisi kesimpulan bahwa permainan tribonacci merupakan perluasan dari permainan Wythoff, walaupun masih ada masalah perluasan yang belum terselesaikan.

2. Aturan Permainan Wythoff dan Permainan Tribonacci

Permainan Wythoff menggunakan dua tumpukan atau wadah, mungkin berbentuk dua keranjang berisi bola atau dua tongkat tegak yang dikalungi gelang-gelang logam atau bentuk-bentuk yang lain. Jika masing-masing tumpukan berisi sebanyak *a* token (bisa berupa *a* buah bola, *a* gelang, *a* lembar kartu atau sembarang *a* benda) dan *b* token, maka permainan fibonacci dikatakan pada posisi (*a*, *b*).

Dalam permainan fibonacci, setiap pemain secara bergantian mengambil token dari kedua tumpukan dengan salah satu dari kedua cara berikut:

Cara F1. Pemain bisa mengambil berapa pun *token* dari satu tumpukan; atau
Cara F2. Pemain bisa mengambil *token* dari dua tumpukan, asalkan banyak token yang diambil dari masing-masing tumpukan adalah sama.

Permainan tribonacci menggunakan tiga tumpukan atau wadah. Jika masing-masing tumpukan berisi sebanyak *a* token, *b* token dan *c* token maka permainan tribonacci dikatakan pada posisi (*a*, *b*, *c*).

Dalam permainan tribonacci, setiap pemain secara bergantian mengambil token dari beberapa tumpukan dengan salah satu cara dari ketiga cara berikut:

Cara T1. Pemain bisa mengambil berapa pun *token* dari salah satu atau dari dua tumpukan; atau

Cara T2. Dari posisi (a, b, c), pemain bisa mengambil token dari tiga tumpukan, masing-masing sebanyak α token dari tumpukan pertama, sebanyak β token dari tumpukan kedua, dan sebanyak γ token dari tumpukan ketiga asalkan banyaknya token yang diambil memenuhi dua syarat pengambilan berikut:

a. $0 < \alpha \leq a$, $0 < \beta \leq b$, $0 < \gamma \leq c$, dan

b. $2\cdot\text{maks}\{\alpha, \beta, \gamma\} \leq \alpha + \beta + \gamma$.

Cara T3. Dari posisi (a, b, c), pemain juga bisa mengambil token dari tiga tumpukan sekaligus: masing-masing sebanyak α token dari dua tumpukan berbeda dan sebanyak β token dari tumpukan ketiga, asalkan memenuhi kedua syarat berikut :

a. $B > 2\alpha > 0$, dan

b. Jika a' (ganti: b', c') adalah banyak token yang tersisa setelah diambil dari tumpukan pertama (ganti: tumpukan kedua, ketiga), maka tidak boleh terjadi $a' < c' < b'$.

3. Solusi Permainan Wythoff

Barisan bilangan fibonacci bisa diturunkan dari kata fibonacci, yaitu sebuah untaian (*string*) **s** atas alfabet $\Sigma = \{a, b\}$ yang didefinisikan oleh morfisma $\phi:\Sigma^* \to \Sigma^*$. Morfisma ϕ memenuhi sifat: $\phi(a) = ab$, $\phi(b) = a$ dan untuk setiap untaian $\mathbf{u} = u_1u_2...u_n \in \Sigma^*$ yang panjangnya n berlaku sifat morfik: $\phi(\mathbf{u}) = \phi(u_1)\phi(u_2)...\phi(u_n)$. Dengan notasi $\phi^0 = id$ (yaitu, ϕ^0 adalah fungsi identitas) dan notasi baku komposisi fungsi: untuk setiap $k = 1, 2, 3, ...$, $\phi^k = \phi(\phi^{k-1})$; kata Fibonacci **s** didefinisikan sebagai limit

$$\mathrm{s} = \lim_{k\to\infty} \phi^k(a). \tag{1}$$

Secara komputasi, kata fibonacci bisa didekati oleh untaian-untaian hingga berikut yang diperoleh dari iterasi ϕ pada a sebanyak $k = 0, 1, 2, ...$ dan seterusnya:

$\phi^0(a) = a$, $\phi(a) = ab$, $\phi^2(a) = aba$, $\phi^3(a) = abaab$, ..., $\phi^{10}(a) =$ *abaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaababaabaababaab aababaabaababaababaabaababaababaabaababaabaababaababaabaababaabab aabaababaababa*..., dan seterusnya.

Barisan $\{f_n\}_{n\geq 0}$ yang didefinisikan melalui $f_0 = 1$, $f_1 = 2$, dan untuk setiap $n > 1$ berlaku $f_n = |\phi^n(a)|$ (panjang untaian $\phi^n(a)$) disebut *barisan fibonacci*. Barisan ini bisa juga didefinisikan secara rekursif dengan nilai awal $f_0 = 1$, $f_1 = 2$, dan untuk setiap $n > 1$ berlaku relasi rekurensi: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Cara lain mendefinisikan barisan ini adalah dengan menggunakan rumus Binet: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, $n = 1, 2, 3, ...$.

Dari kata fibonacci, didefinisikan barisan pasangan bilangan bulat $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ dengan

$$\begin{aligned} a_n &= \text{posisi kemunculan huruf } a \text{ ke-}n \text{ kali dalam } \mathbf{s}\text{; dan} \\ b_n &= \text{posisi kemunculan huruf } b \text{ ke-}n \text{ kali dalam } \mathbf{s}\text{;} \end{aligned} \tag{2}$$

Bisa dibuktikan, pasangan (a_n, b_n) merupakan posisi-*P* permainan Wythoff. Beberapa buku teks menyajikan pembuktiannya. misalnya buku teks ([3], Theorem 2, hal. 105). Terdapat sebanyak 150 posisi-*P* awal dari permainan Wythoff. Tabel **Error! Reference source not found.** berikut menyajikan sebanyak 13 pasangan posisi-*P* awal (a_n, b_n).

Tabel 1. Pasangan (a_n, b_n) sebagai posisi-*P* permainan Wythof.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21	…
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34	…

Salah satu pemain bisa dipaksa oleh pemain lain untuk selalu berada di posisi-*P* sehingga akhirnya berada pada posisi-*P* mati, yaitu posisi $(a_0, b_0) = (0, 0)$ dimana pemain tersebut tak bisa lagi melangkah (kalah).

Pembuktian bahwa barisan pasangan (a_n, b_n) membentuk barisan posisi-*P* dari permainan Wythoff pertama kali dikerjakan oleh Wythoff pada tahun 1907 dan pembuktian ini bisa dijumpai pada buku-buku teks tentang permainan kombinatorik, misalnya buku teks karangan **Error! Reference source not found.** ([3], hal.101-105).

Cara lain (cara rekursif) mendefinisikan Tabel **Error! Reference source not found.** adalah dengan menggunakan operator *Mex* (*Minimum excluded*) yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.

Untuk setiap himpunan atau barisan dari bilangan-bilangan asli $\{x_i\}_{i=1}^{m}$ *didefinisikan*

$$Mex\{x_i\}_{i=1}^{m} = min\ \{n \in \mathbf{N} \mid n \neq x_i,\ untuk\ setiap\ i \in \{1, 2, \ldots, m\}\}.$$

Dengan definisi Mex di atas, diperoleh cara berikut untuk mendapatkan Tabel 1 secara rekursif, yaitu melalui relasi rekurensi:

$$\begin{aligned} a_n &= Mex\{a_i, b_i \mid 0 \le i < n\}; \\ b_n &= a_n + n. \end{aligned} \tag{3}$$

Sebenarnya masih ada cara ketiga menurunkan pasangan (a_n, b_n), yaitu sebagai salah satu barisan Beatty. Cara ini adalah cara yang paling elementer dan paling banyak ditulis dalam berbagai buku teks permainan kombinatorik. Sesungguhnya (misalnya [3]) posisi-*P* permainan Wythoff membentuk barisan Beatty $(\lfloor n\rho \rfloor, \lfloor n\rho^2 \rfloor)$ di mana $\rho = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ adalah rasio mulia (*golden ratio*) dan $\lfloor x \rfloor$ adalah hasil dari pembulatan ke bawah terhadap bilangan x (yaitu, $\lfloor \ldots \rfloor$ adalah fungsi *floor*).

Tetapi cara ini belum bisa diperluas untuk konstruksi posisi-*P* permainan tribonacci. Misalnya dengan memandang ruas paling kanan dari bentuk kesamaan berikut

$$(a_n, b_n) = (\lfloor n\rho \rfloor, \lfloor n\rho^2 \rfloor) = (\lfloor n\rho + 0 \rfloor, \lfloor n\sigma + 0 \rfloor),$$

di mana $\sigma = \rho^2$, setiap usaha perluasan ruas kanan bentuk ini ke bentuk

$$(A_n, B_n, C_n) = (\lfloor n\alpha + \alpha' \rfloor, \lfloor n\beta + \beta' \rfloor, \lfloor n\gamma + \gamma' \rfloor), \tag{4}$$

akan gagal, sesuai Teorema 5 dari tulisan [2].

4. Solusi Permainan Tribonacci

Barisan tribonacci bisa diturunkan dari kata tribonacci melalui cara yang serupa dengan cara penurunan barisan fibonacci. Persisnya, kata tribonacci adalah sebuah untaian (*string*) **t** atas alfabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ yang didefinisikan oleh morfisma $\tau:\Sigma^* \to \Sigma^*$. Morfisma ini memenuhi sifat: $\tau(a) = ab$, $\tau(b) = ac$, $\tau(c) = a$ dan untuk setiap untaian $\mathbf{u} = u_1u_2...u_n \in \Sigma^*$ (panjang n) berlaku sifat morfik: $\tau(\mathbf{u}) = \tau(u_1)\tau(u_2)...\tau(u_n)$.
Kata tribonacci **t** didefinisikan sebagai limit

$$\mathbf{t} = \lim_{k\to\infty} \tau^k(a). \tag{5}$$

Secara komputasi, kata tribonacci bisa didekati oleh untaian-untaian hingga berikut yang diperoleh dari iterasi τ pada a dengan banyak kali k = 0, 1, 2, ... dan seterusnya:
$\tau^0(a) = a$, $\tau(a) = ab$, $\tau^2(a) = abac$, $\tau^3(a) = abacaba$, ..., $\tau^8(a)$ = *abacabaabacababacabaabacabacabaabacababacabaabacabaabacababacabaabacabacabaabacababacabaabacababacabaabacabacabaabacababacabaabacabaabacababacabaabac*..., dan seterusnya.

Barisan $\{T_n\}_{n\geq 0}$ yang didefinisikan melalui T_0= 1, T_1= 2, T_2= 4, dan untuk setiap $n > 2$ berlaku $T_n = |\tau^n(a)|$ (panjang untaian $\tau^n(a)$), disebut barisan tribonacci. Definisi lain dari barisan tribonacci adalah definisi secara rekursif dengan nilai awal T_0= 1, T_1= 2, T_2= 4, dan untuk setiap $n > 2$ berlaku $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$.

Dari kata tribonacci, didefinisikan barisan urutan-3 $(A_n, B_n, C_n)_{n\geq 0}$ dengan

$$\begin{aligned} A_n &= \text{posisi kemunculan huruf } a \text{ ke-}n \text{ kali dalam } \mathbf{t}\text{; dan ;} \\ B_n &= \text{posisi kemunculan huruf } b \text{ ke-}n \text{ kali dalam } \mathbf{t}\text{; dan ;} \\ C_n &= \text{posisi kemunculan huruf } c \text{ ke-}n \text{ kali dalam } \mathbf{t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Tabel 2. Urutan-3 (A_n, B_n, C_n) Sebagai Posisi-*P* Permainan Tribonacci

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	···
A_n	0	1	3	5	7	8	10	12	14	16	18	20	21	23	25	27	···
B_n	0	2	6	9	13	15	19	22	26	30	33	37	39	43	46	50	···
C_n	0	4	11	17	24	28	35	41	48	55	61	68	72	79	85	92	···

Secara lengkap, terdapat sebanyak 180 posisi-*P* awal dari permainan Tribonacci.

Cara lain mendapatkan Tabel **Error! Reference source not found.** adalah dengan cara rekursif melalui relasi rekurensi:

$$\begin{aligned} A_n &= Mex\{A_i,\ B_i, C_i \mid 0 \leq i < n\}; \\ B_n &= A_n + Mex\{B_i - A_i,\ C_i - B_i;\ 0 \leq i < n\}; \\ C_n &= A_n + B_n + n. \end{aligned} \tag{7}$$

Pembuktian kedua cara konstruksi melalui ekspresi (**Error! Reference source not found.**) dan melalui ekspresi (**Error! Reference source not found.**) akan membentuk satu barisan urutan-3 (A_n, B_n, C_n) yang sama, yaitu barisan semua posisi-*P* permainan tribonacci, dibuktikan oleh [2], atau secara lebih detail dan dengan sedikit perbaikan, disajikan di [4].

5. Kesimpulan

Konstruksi suatu struktur matematis (barisan, matriks, gelanggang aljabar, dan sebagainya) merupakan perluasan dari konstruksi struktur matematis yang lain jika semua parameter yang ada di dalam struktur pertama berasosiasi dengan parameter yang serupa yang juga ada pada struktur yang kedua (tetapi tidak sebaliknya), atau syarat-syarat yang diperlukan untuk konstruksi struktur yang pertama lebih longgar (lebih sedikit) daripada syarat-syarat yang diperlukan untuk konstruksi struktur yang kedua.

Kedua permainan Wythoff dan tribonacci memiliki himpunan posisi-*P* yang dikonstruksi dengan dua cara yang serupa. Himpunan posisi-*P* kedua permainan masing-masing diturunkan dari barisan fibonacci dan barisan tribonacci. Fakta bahwa barisan tribonacci merupakan perluasan dari barisan fibonacci, merupakan petunjuk pertama bahwa permainan tribonacci merupakan perluasan dari permainan Wythoff. Fakta lain, banyaknya parameter A_n, B_n, dan C_n dari posisi-*P* permainan tribonacci adalah tiga buah sedangkan banyaknya parameter a_n dan b_n dari posisi-*P* permainan Wythoff hanya dua.

Demikian pula, kata fibonacci dikonstruksi atas alfabet $\{a, b\}$ yang terdiri atas dua huruf sedangkan kata tribonacci dikonstruksi atas alfabet $\{a, b\}$ yang terdiri atas tiga huruf, padahal konstruksi keduanya dilakukan melalui proses limit yang serupa: melalui ekspresi limit (**Error! Reference source not found.**) dan melalui ekspresi limit (**Error! Reference source not found.**).

Posisi-*P* permainan tribonacci merupakan perluasan dari posisi-*P* permainan fibonacci bisa juga dilihat dari keserupaan antara ekspresi (**Error! Reference source not found.**) yang diperoleh dari posisi-*P* permainan Wythoff dengan ekspresi (**Error! Reference source not found.**) yang diperoleh dari posisi-*P* permainan tribonacci, tetapi yang terakhir mengandung tiga parameter. Hal ini lebih dipertegas oleh kemiripan antara ekspresi (**Error! Reference source not found.**) untuk permainan Wythoff dengan ekspresi (**Error! Reference source not found.**) untuk permainan tribonacci, tetapi yang terakhir lebih lengkap dan lebih banyak parameternya.

Masalah yang tersisa adalah bagaimana memperluas cara konstruksi posisi-*P* untuk permainan Wythoff dengan menggunakan barisan Beatty ke cara konstruksi posisi-*P* untuk permainan tribonacci. Jika perluasan cara ini ada, tidak mungkin berbentuk seperti ekspresi (**Error! Reference source not found.**).

Daftar Pustaka

[1] Berlekamp E.R., Conway J.H., and Guy R., 2003. *Winning ways for your Mathematical Play, Vol.1*. AK Peters.

[2] Duchêne E., and Rigo M., 2008. A Morphic Approach to Combinatorial Games: The tribonacci Case. *RAIRO, Theoretical Informatics and Applications.* **42**: 375-393.

[3] Honsberger R., 1970. Ingenuity in Mathematics. *Mathematical Association of America, Edisi 5*.

[4] Rakhman R., 2012. Solusi Permainan Tribonacci Sebagai Sebuah Perluasan dari Permainan Wythoff. *Tesis*. Program Studi S2 Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Hasanuddin.