J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 13, No. 1, 39-45, Juli 2016

ISBN:1858-1382

Solusi Persamaan Helmholtz untuk Material Komposit

Jeffry Kusuma*

Abstrak

Propagasi gelombang pada material homogen telah banyak dibahas dan didiskusikan oleh banyak ahli. Akan tetapi propagasi gelombang pada material tak homogen seperti material komposit sangat jarang dibahas. Hal ini bukannya disebabkan oleh tidak adanya ataupun kurangnya aplikasi, tetapi lebih didorong atau disebabkan oleh kesulitan matematis yang akan dihadapi. Tulisan ini mencoba membahas penggunaan metode elemen batas atau BEM (*Boundary Elemen Method*) untuk mempelajari sifat-sifat propagasi gelombang pada material komposit.

Kata Kunci: Propagasi gelombang, material komposit, metode elemen batas.

1. Pendahuluan

Dewasa ini, penerapan matematika dalam berbagai bidang aplikasi makin banyak dijumpai. Pemodelan matematika yang melibatkan gelombang pun telah banyak didiskusikan. Kemajuan studi akan sifat-sifat propagasi gelombang pun tidak dapat disangkal telah mengalami banyak kemajuan, khususnya akan propagasi gelombang pada materi yang homogen. Untuk materi yang tidak homogen, katakan materi yang bersifat komposit, telah pula mengalami kemajuan yang tidak sedikit, seperti Sánches–Sesma dan Esquivel (1979) yang membahas efek pergerakan tanah pada lembah yang sudah tertimbun yang mana sebenarnya melibatkan material komposit, Trifunac (1971) yang membahas gerakan permukaan pada lembah setengah lingkaran yang sudah tertimbun, juga Alsop *et al.* (1970) yang membahas refleksi dan transmisi dari gelombang inhomogeneous, terakhir oleh Kusuma (1992, 1993, 1994), yang kesemuanya mencerminkan kesulitan matematis yang dihadapi.
Penggunaan metode elemen batas untuk menyelesaikan beberapa persoalan yang melibatkan material inhomogen maupun nonhomogen seperti material komposit untuk lembah yang tertimbun telah memperlihatkan keampuhan metode elemen batas (Kusuma, 1992; 1993; 1994).

Dalam tulisan ini, penggunan metode elemen batas dikhususkan untuk menyelesaikan persoalan perambatan gelombang pada material komposit yang terdiri dari dua jenis material, dimana material yang kedua keseluruhannya berada di dalam material yang pertama.

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin Makassar*

2. Problema dan Persamaan Helmholtz

Propagasi gelombang dalam material elastic homogeneous padat dua dimensi akan memenuhi persamaan gelombang (Kreyzig, 1983).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1\partial^2 U}{\beta^2 \partial t^2}, \qquad (1)$$

dimana U menyatakan simpangan dan $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ merupakan kecepatan gelombang pada material elastik, μ, ρ, t masing masing menyatakan modulus *shear*, massa jenis dan waktu berturut-turut.

Untuk gelombang yang harmonik dan tak tergantung pada waktu dari $\exp(i\omega t)$, persamaan (1) segera tereduksi menjadi persamaan Helmholtz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \lambda^2 U = 0, \qquad (2)$$

dimana $\lambda = \frac{\omega}{\beta}$, dan ω menyatakan frekuensi melingkar gelombang.

Bilamana gelombang melewati suatu material komposit yang terdiri dari dua jenis material homogen dimana material homogen yang satu seluruhnya berada di dalam material homogen lainnya, maka akan memenuhi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + \lambda_j^2 U_j = 0, \qquad j = 1,2 \qquad (3)$$

atau

$$\nabla^2 U_j + \lambda_j^2 U_j = 0, \qquad j = 1,2 \qquad (4)$$

dimana j = 1 menyatakan persamaan gelombang yang berada pada material pertama, dan j = 2 menyatakan persamaan gelombang yang berada pada material kedua. Sebagaimana yang telah dibahas dalam Kusuma (1992), fungsi Green yang berhubungan dengan Helmholtz (Kusuma, 1992) dapat dituliskan dalam bentuk

$$G_j = \frac{1}{4} Y_0(\lambda_j r), \qquad j = 1,2, \qquad (5)$$

dimana Y_0 menyatakan fungsi Bessel jenis kedua yang berordo 0, dan $r = \{(x-a)^2 + (y-b)^2\}^{\frac{1}{2}}$, karena fungsi ini memenuhi persamaan

$$\nabla^2 G_j + \lambda_j^2 G_j = \delta_j(x-a, y-b), \qquad j = 1,2 \qquad (6)$$

dan δ_j menyatakan kronecker delta.

3. Hubungan Resiprokal

Teorema.
Bila ϕ_j dan ϕ_j' keduanya merupakan solusi persamaan Helmholtz (4) *yang valid dalam suatu domain tertutup D_j yang dibatasi oleh kontur tertutup sederhana C_j, maka hubungan resiprokal yang dipenuhi adalah*

$$\int_{C_j} \phi_j \frac{\partial \phi_j'}{\partial n} - \phi_j' \frac{\partial \phi_j'}{\partial n} dS_j = 0, \qquad j = 1{,}2. \tag{7}$$

Bukti :

$$\int_{C_j} \phi_j \frac{\partial \phi_j'}{\partial n}\, dS_j = \int_{C_j} \phi_j \left(\frac{\partial \phi_j'}{\partial x} n_1 + \frac{\partial \phi_j'}{\partial y} n_2 \right) dS_j, \tag{8}$$

Lebih lanjut, dengan menggunakan teorema divergensi diperoleh

$$\begin{aligned}
\int_{C_j} \phi_j \frac{\partial \phi_j'}{\partial n}\, dS_j &= \int_{D_j} \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi_j \frac{\partial \phi_j'}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\phi_j \frac{\partial \phi_j'}{\partial y}\right) dV_j, \\
&= \int_{D_j} \phi_j \frac{\partial^2 \phi_j'}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_j'}{\partial x} + \phi_j \frac{\partial^2 \phi_j'}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\frac{\partial \phi_j'}{\partial y}\, dV_j, \\
&= \int_{D_j} \phi_j \nabla^2 \phi_j' + \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_j'}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\frac{\partial \phi_j'}{\partial y}\, dV_j, \\
&= \int_{D_j} \frac{\partial \phi_j}{\partial x}\frac{\partial \phi_j'}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial y}\frac{\partial \phi_j'}{\partial y} \\
&\quad - \lambda_j^2 \phi_j \phi_j'\, dV_j. \qquad (9)
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\int_{C_j} \phi_j' \frac{\partial \phi_j}{\partial n}\, dS_j = \int_{D_j} \frac{\partial \phi_j'}{\partial x}\frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j'}{\partial y}\frac{\partial \phi_j}{\partial y} - \lambda_j^2 \phi_j' \phi_j\, dV_j. \tag{10}$$

Bila persamaan (9) dan (10) diperkurangkan maka diperoleh persamaan (7) sehingga terbuktilah hubungan reciprokal di atas. □

4. Persamaan Integral

Persamaan integral diturunkan dengan memperhatikan kontur yang membatasi domain yang ditinjau. Bila ditentukan bahwa material komposit terdiri dari material pertama di bagian luar dibatasi kontur C_1, dan material kedua seluruhnya berada dalam material pertama dan dibatasi oleh kontur C_2, maka kontur yang membatasi material pertama seluruhnya adalah kontur tertutup sederhana $C_1 \cup C_2$. Dengan mengeluarkan sebuah titik (*a*,*b*) dari dalam kontur tertutup yang membatasi material pertama, katakanlah kontur ini berbentuk lingkaran kecil Γ dengan jari-jari ϵ maka dari hubungan resiprokal akan diperoleh persamaan

$$\int_{C_1+C_2+\Gamma}\left(\phi_1\frac{\partial\phi_1'}{\partial n}-\phi_1'\frac{\partial\phi_1'}{\partial n}\right)dS=0, \qquad (11)$$

atau

$$\int_{C_1+C_2}\left(\phi_1\frac{\partial\phi_1'}{\partial n}-\phi_1'\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)dS+\int_{\Gamma}\left(\phi_1\frac{\partial\phi_1'}{\partial n}-\phi_1'\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)dS=0. \qquad (12)$$

Karena $\int_{\Gamma}\ \phi_1\frac{\partial\phi_1'}{\partial n}dS=-\phi(a,b)$ dan $\int_{\Gamma}\ \phi_1'\frac{\partial\phi_1}{\partial n}dS=0$, maka persamaan (12) segera tereduksi menjadi

$$\psi\phi_1(a,b)=\int_{C_1+C_2}\left(\phi_1\frac{\partial\phi_1'}{\partial n}-\phi_1'\frac{\partial\phi_1}{\partial n}\right)dS. \qquad (13)$$

Disini ψ adalah Konstanta yang merupakan nilai tengah Cauchy. Konstanta ψ akan bernilai 1 bilamana titik (a,b) pada material pertama berada di dalam kontur C_1+C_2, dan ψ bernilai $\frac{1}{2}$ bilamana (a,b) berada pada kontur C_1+C_2.

Sebagaimana dalam Kusuma (1993), kontur C_1 disini dipilih dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam, sedangkan kontur C_2 dipilih searah jarum jam.

Dengan cara yang sama pula bila titik (c,d) dikeluarkan dari kontur C_2 yang membatasi material kedua maka akan diperoleh integral

$$\psi\phi_2(c,d)=\int_{-C_2}\left(\phi_2\frac{\partial\phi_2'}{\partial n}-\phi_2'\frac{\partial\phi_2}{\partial n}\right)dS, \qquad (14)$$

atau

$$\psi\phi_2(c,d)=\int_{C_2}\left(\phi_2'\frac{\partial\phi_2}{\partial n}-\phi_2\frac{\partial\phi_2'}{\partial n}\right)dS, \qquad (15)$$

dimana ψ merupakan konstanta nilai tengah Cauchy. Kontur C_2 tetap dipilih searah arah jarum jam.

Bila pada persamaan (13) ϕ_1 diganti dengan U_1 dan ϕ_1' dengan G_1 sebagaimana dalam persamaan (5), maka segera diperoleh persamaan integral yang valid dalam material pertama yakni

$$\psi U_1(a,b)=\int_{C_1+C_2}\left(U_1\frac{\partial G_1}{\partial n}-G_1\frac{\partial U_1}{\partial n}\right)dS. \qquad (16)$$

Demikian pula pergantian ϕ_2 diganti dengan U_2 dan ϕ_2' dengan G_2 segera diperoleh persamaan integral

$$\psi U_2(c,d) = \int_{C_2} \left(G_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) dS. \quad (17)$$

5. Metode Elemen Batas

Metode elemen batas disini langsung menggunakan persamaan (16) dan (17). Dengan mendiskritkan batasan kontur C_1 dan C_2, katakan C_1 ke dalam N segmen dan C_2 ke dalam M segmen, persamaan (16) segera tereduksi menjadi

$$\psi U_1(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \int_{C_{1i}} \left(U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) dS + \sum_{i=1}^{M} \int_{C_{2i}} \left(U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) dS. \quad (18)$$

Demikian pula persamaan (17) tereduksi menjadi

$$\psi U_2(c,d) = \sum_{i=1}^{M} \int_{C_{2i}} \left(G_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} \right) dS. \quad (19)$$

Selanjutnya, dengan melakukan pendekatan elemen konstan, yakni dengan menganggap U_1, $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ pada kontur C_1 dan C_2 serta U_2, $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ pada kontur C_2 merupakan suatu konstan, maka persamaan (18) dan (19) berturut-turut dapat dituliskan sebagai

$$\psi U_{1j}(a,b) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ U_{1j} \int_{C_{1i}} \frac{\partial G_1}{\partial n} dS - \frac{\partial U_1}{\partial n}\bigg|_i \int_{C_{1i}} G_1 dS \right\} +$$

$$\sum_{i=1}^{M} \left\{ U_{1j} \int_{C_{2i}} \frac{\partial G_1}{\partial n} dS - \frac{\partial U_1}{\partial n}\bigg|_i \int_{C_{2i}} G_1 dS \right\} \quad (20)$$

dan

$$\psi U_{2j}(c,d) = \sum_{i=1}^{M} \left\{ \frac{\partial U_2}{\partial n}\bigg|_i \int_{C_{2i}} G_2\, dS - U_{2i} \int_{C_{2i}} \frac{\partial G_2}{\partial n} dS \right\}. \quad (21)$$

Untuk propagasi gelombang yang kontinu, simpangan gelombang beserta *shear stress* yang dibawa dari material pertama harus sama dengan yang diteruskan ke material kedua dan sebaliknya. Persamaan kontinuitas ini memberikan hubungan

$$U_{1j} = U_{2j}, \qquad j = 1,2,\ldots,M, \quad (22)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial n}\bigg|_j = \frac{\partial U_2}{\partial n}\bigg|_j, \quad j = 1,2,\ldots,M. \quad (23)$$

Selanjutnya, bila diberikan N buah syarat awal yang diketahui pada batasan luar material pertama, yakni pada kontur C_1, maka persamaan (20) sampai (23) beserta syarat awalnya segera membentuk $N + 2M$ sistem persamaan linier dengan $N + 2M$ variabel yang tidak diketahui.

Sekali sistem persamaan linier ini terselesaikan, simpangan ataupun *shear stress* dapat dengan mudah diketahui dengan melibatkan persamaan (20) dan (21) untuk titik yang mana saja di dalam domain material pertama, maupun di dalam material kedua.

6. Hasil Numerik

Sebagai ilustrasi ketepatan dan keakuratan serta keabsahan teknik penyelesaian sebagaimana dipaparkan di atas, marilah tinjau suatu domain material komposit yang terdiri dari dua macam material homogen. Material pertama menempati daerah bujur sangkar yang dibatasi oleh vertex (0,0), (1,0), (1,1), dan (0,1), sedangkan di dalam material ini terdapat material kedua yang dibatasi oleh vertex $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$, dan $\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$.

Bila masing-masing sisi bujur sangkar yang berada di sebelah luar dibagi atas 4 segmen yang sama panjang, demikian pula setiap sisi bujur sangkar yang berada di dalam menjadi 4 segmen yang sama panjang dan diberikan kondisi batas

$$U(x,0) = \cos\ x, \tag{24}$$

$$U(x,1) = \cos\ x, \tag{25}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}(0,y) = 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}(1,y) = -\sin x, \tag{27}$$

maka syarat batas berserta syarat kontinuitas (20) akan membentuk suatu sistem persamaan linier yang terdiri dari 48 persamaan dengan 48 variabel.

Bila sistem persamaan linier ini diselesaikan dan dilanjutkan dengan prosedur sebagaimana yang dipaparkan sebelumnya, maka akan diperoleh hasil sebagaimana yang ada pada tabel berikut di bawah ini.

Tabel 1. Nilai U dan $\partial U/\partial n$ pada Beberapa Titik di Batasan.

Titik di Batasan	Hasil Analitik		Hasil Komputasi		Error	
	U	$\partial U/\partial n$	U	$\partial U/\partial n$	U	$\partial U/\partial n$
(0.0000 , 0.8750)	1.0000	-	1.0002	0.0000	0.0002	-
(0.0000 , 0.6250)	1.0000	-	1.0014	0.0000	0.0014	-
(0.0000 , 0.3750)	1.0000	-	1.0014	0.0000	0.0014	-
(0.0000 , 0.1250)	1.0000	-	1.0002	0.0000	0.0002	-
(0.2500 , 0.3125)	0.9689	-0.2474	0.9700	-0.2873	0.0011	-0.0399
(0.2500 , 0.4375)	0.9689	-0.2474	0.9703	-0.2487	0.0014	-0.0013
(0.2500 , 0.5625)	0.9689	-0.2474	0.9703	-0.2487	0.0014	-0.0013
(0.2500 , 0.6875)	0.9689	-0.2474	0.9700	-0.2873	0.0011	-0.0399

Tabel 2. Nilai U, $\partial U/\partial x$ dan $\partial U/\partial y$ pada Beberapa Titik di Interior.

Titik di Interior	Hasil Analitik			Hasil Komputasi		
	U	$\partial U/\partial x$	$\partial U/\partial y$	U	$\partial U/\partial x$	$\partial U/\partial y$
(0.3000 , 0.3000)	0.9553	-0.2955	0.0000	0.9563	-0.3154	-0.0132
(0.4000 , 0.4000)	0.9211	-0.3894	0.0000	0.9223	-0.3915	0.0032
(0.5000 , 0.5000)	0.8776	-0.4794	0.0000	0.8789	-0.4793	0.0000
(0.5000 , 0.4000)	0.8776	-0.4794	0.0000	0.8788	-0.4790	0.0022
(0.7000 , 0.7000)	0.7648	-0.6442	0.0000	0.7673	-0.5713	0.0660

Tabel 3. Kesalahan Pendekatan pada Beberapa Titik di Interior.

Titik di Interior	Error		
	U	$\partial U/\partial x$	$\partial U/\partial y$
(0.3000 , 0.3000)	0.0010	-0.0199	-0.0132
(0.4000 , 0.4000)	0.0012	-0.0021	0.0032
(0.5000 , 0.5000)	0.0013	0.0001	0.0000
(0.5000 , 0.4000)	0.0013	0.0004	0.0022
(0.7000 , 0.7000)	0.0025	0.0729	0.0660

Hasil yang lebih teliti tentunya dapat dicapai dengan pendiskritan lebih banyak atau pemilihan segment integral yang lebih kecil.

Daftar Pustaka

Abramowitz, M. dan Stegun, I.A., 1970. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, New York.

Alsop, L.E., Goodman, A.S., dan Gregersen S., 1970. *Reflection and Transmission of Inhomogeneous Waves with Particular Application to Rayleigh Waves.*

Kreyzig, E., 1983. *Advanced Engineering Mathematics, Fifth Edition.* John Wiley and Sons, New York.

Kusuma, J., 1992. On some mathematical aspects of deformation of inhomogeneous elastic materials. *Ph.D Thesis*, The University of Adelaide, Australia.

_________, 1993. Model matematika untuk efek permukaan yang disebabkan oleh datangnya gelombang SH (*Surface Horizontal*). *Laporan Penelitian*, Universitas Hasanuddin Makassar.

_________, 1994. Model matematika untuk efek pembesaran amplitudo gelombang di bawah pengaruh kandungan deposit yang tertimbun dalam tanah. *Laporan Penelitian*, Universitas Hasanuddin Makassar.

Sánchez-Sesma, F.J., Esquivel, J.A., 1979. Ground motion on alluvial valleys under incident plane SH waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 69, 1107 – 1120.

Trifunac, M.D., 1971. Surface motion of a semi–cylindrical alluvial valley for incident plane SH waves. *Bull. Seism. Soc. Am.*, 61, 1755 – 1770.