ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 11, No. 1, 39-44, Juli 2014

KONSTRUKSI POSISI-*P* DARI PERMAINAN WYTHOFF

Muhlis Maulana Ibrahim[1], Loeky Haryanto [2], Amir Kamal Amir [3]

maulana.ibrahim.muhlis@gmail.com

ABSTRAK

Permainan Wythoff merupakan permainan yang dimainkan oleh dua orang pemain yang secara bergantian memilih sebuah langkah sahih untuk merubah posisi $(x, y) \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}$ ke posisi (x', y'). Terdapat barisan $\{(a_n, b_n)\}_{\geq 0}$ yang setiap pasangan (a_n, b_n) dari barisan ini disebut posisi-*P*. Salah satu posisi-*P* adalah (0, 0) dan pemain yang mendapat posisi (0, 0) dinyatakan kalah. Setiap posisi-*P* (a_n, b_n) memenuhi sifat: tidak ada pilihan langkah untuk merubah posisi-*P* (a_n, b_n) ke posisi-*P* yang lain. Sebaliknya dengan memilih langkah yang tepat, setiap posisi (x, y) yang bukan posisi-*P* bisa dibawa ke posisi-*P*.

Sesuai dengan cara konstruksinya, ada tiga bentuk posisi-*P* dari permainan Wythoff: sebagai dua barisan Beatty yang saling komplemen yang diperoleh dari rasio mulia, sebagai koordinat titik-titik yang diperoleh dari fungsi Sprague-Grundy dan operator Mex dan sebagai posisi kemunculan ke-*n* dari symbol *a* dan *b* di dalam kata Fibonacci atas alfabet $\{a, b\}$.

Kata Kunci: Posisi-*P* permainan Wythoff, rasio mulia, barisan Beatty, operator *Mex*, fungsi Sprague-Grundy, kata Fibonacci.

ABSTRACT

Wythoff game is played by two players who alternatingly choose a valid step to change the current position $(x, y) \in \mathbf{Z}_{\geq 0} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}$ of the game. There is a sequence $\{(a_n, b_n)\}_{\geq 0}$ in which every pair (a_n, b_n) is called a *P*-position. One of the *P*-position is (0, 0) and any player who gets the position (0, 0) lost the game. Every *P*-position (a_n, b_n) satisfies the following properties: there is no valid step that changes a *P*-position(a_n, b_n) to another *P*-position and conversely from any non *P*-position, there is a smart step that changes the position to a *P*–position.

In accordance with the construction, there are three forms of *P*-positions: as complementary Beatty sequences generated using golden ratio, as coordinate positions obtained from the Sprague-Grundy function equipped with *Mex* operator or as positions of the *n*-th occurrence of *a* and *b* in Fibonacci word over alphabet $\{a, b\}$.

Key Words: *P*-positions of Wythoff game, golden ratio, Beatty sequences, *Mex* operator, Sprague-Grundy function, Fibonacci word.

1. Pendahuluan

Teori permainan kombinatorik (*combinatorial games*) adalah teori yang membahas permainan menang-kalah atau sukses-gagal yang dimainkan oleh dua pemain dengan berbagai aturan. Setiap pemain secara bergantian melakukan langkah-langkah untuk merubah posisi permainan sampai salah satu pemain kalah, yaitu tak bisa melanjutkan dengan satu langkah sah (langkah yang sesuai aturan permainan). Posisi menang atau kalah dapat dirumuskan secara

[1] Program S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
[2] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
[3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

sistematis dengan berbagai manipulasi kombinatorik berdasarkan masukan data yang diberikan atau dipilih pemain-pemainnya.[4]

Salah satu ciri permainan kombinatorik adalah terdapat himpunan posisi-posisi yang masing-masing disebut posisi-*P* (biasa juga disebut dengan posisi aman) sedemikian hingga jika posisi permainan berada pada posisi-*P*, maka pemain yang mengerjakan langkah sebelumnya *(previous move)* bisa memaksakan kemenangan. Posisi yang bukan posisi-*P* disebut posisi-*N* (dari kata *Next*).

Salah satu di antara permainan kombinatorik adalah permainan Wythoff (*Wythoff game*), permainan yang solusinya pertama kali diberikan oleh Willem Abraham Wythoff pada tahun 1907.

2. Aturan Permainan Wythoff

Permainan Wythoff menggunakan dua tumpukan atau wadah, dapat berupa dua keranjang berisi bola atau dua tongkat tegak yang dikalungi gelang-gelang logam atau bentuk-bentuk yang lain di mana setiap pemain pada gilirannya mengikuti aturan sebagai berikut [1]:

- Terdapat dua pemain yang bermain secara bergantian;
- Setiap pemain bisa mengambil satu token atau lebih;
- Setiap pemain bisa mengambil token dari satu tumpukan dalam jumlah sembarang;
- Setiap pemain bisa mengambil token dari kedua tumpukan, asalkan banyaknya token yang diambil dari masing-masing tumpukan adalah sama;
- Pemain yang mengambil token terakhir adalah pemenangnya.

Terdapat bentuk permainan yang diciptakan oleh Rufus P. Isaacs yang ekuivalen dengan permainan Wythoff. Isaacs menggambarkan sebuah permainan yang mirip dengan gerakan sah dari Ratu (*Queen*) permainan catur, yaitu hanya bergerak secara vertikal ke selatan, secara horizontal ke barat, atau secara diagonal ke arah barat daya pada papan catur. Di mana Ratu ditempatkan pada sembarang posisi $(s, t) \neq (0, 0)$, bisa dikolom sebelah kanan ataudi barisbagian ataspapan catur atau pada diagonal. Dengan batasan aturan gerak Ratu seperti di atas, pemain yangdapat menempatkan Ratu kesudut paling kiri paling bawahadalah pemenangnya.

3. Barisan Beatty

Misalkan lambang $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x (pembulatan ke bawah terhadap x). Barisan Beatty untuk bilangan tak rasional $a > 1$ adalah barisan $\{\lfloor na \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ [3], yaitu barisan

$$\lfloor a \rfloor, \lfloor 2a \rfloor, \lfloor 3a \rfloor, \ldots.$$

Teorema: (Beatty)

Jika a dan b adalah bilangan tak rasional yang memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, *maka kedua barisan* $\{\lfloor na \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ *dan* $\{\lfloor nb \rfloor\}_{n=1}^{\infty}$ *saling lepas dan hasil gabungannya adalah himpunan semua bilangan asli*.

Kedua barisan tersebut dalam teorema di atas disebut dua barisan Beatty yang saling komplemen.

4. Operator Mex dan Fungsi Sprague-Grundy

Misalkan **O** = {0, 1, 2, …} adalah himpunan bilangan-bilangan cacah. Operator *Mex* (*Minimum excluded*) didefinisikan sebagai berikut [2].

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

Definisi

Untuk setiap himpunan $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{O}$ *dari bilangan-bilangan cacah didefinisikan*

$$Mex\,\{\mathbf{A}\} = \min\,(\mathbf{O} - \mathbf{A})$$

Definisi Mex bisa dikenakan pada barisan $\{a_n\}$ dengan mengadopsi

$$\mathbf{A} = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$

dalam definisi di atas.

Fungsi Sprague-Grundy $Sp(s, t)$ didefinisikan secara rekursif dengan nilai awal $Sp(0,0) = 0$ dan tiga himpunan awal $G_1(0,0) = G_2(0,0) = G_3(0,0) = \{0\}$. Jika $s<0$ atau $t<0$, didefinisikan $G_1(s, t) = G_2(s, t) = G_3(s, t) = \emptyset$. Selanjutnya,untuk setiap pasang bilangan bulat $(s, t) \neq (0, 0)$ berlaku

$$Sp(s, t) = Mex(\{G_1(s-1, t) \cup G_2(s-1, t-1) \cup G_3(s, t-1)\}$$

di mana

$$G_1(s, t) = \bigcup_{0\le x\le s} \{Sp(x, t)\}.$$

$$G_2(s, t) = \bigcup_{\substack{0<s-x=t-y\\ \le \min(s,t)}} \{Sp(x, y)\}.$$

$$G_3(s, t) = \bigcup_{0\le y\le t} \{Sp(s, y)\}.$$

Dengan kata lain,

$G_1(s, t) = \{Sp(0, t), Sp(1, t), \ldots, Sp(s-1, t)\}$,

$G_2(s, t) = \{ Sp(s - \min\{s, t\}, t - \min\{s, t\}), \ldots, Sp(s-2, t-2), Sp(s-1, t-1)\}$

$G_3(s, t) = \{ Sp(s, 0), Sp(s,1), \ldots, Sp(s, t-1)\}$

Dari $Sp(0, 0) = 0$, diturunkan $Sp(0, 1) = 1 = Sp(1, 0)$, $Sp(1, 1) = 2$, dst.

5. Konstruksi Posisi-*P* Permainan Wythoff

Dalam konteks permainan kombinatorik, fokus utamanya adalah mencari nilai pasangan $(a_n, b_n)_{n\ge 0}$ yang merupakan barisan posisi-*P* dari permainan Wythoff. Posisi-*P* permainan Wythoff bisa diperoleh dari rasio mulia φ,dengan fungsi Sprague-Grundy yang dilengkapi operator Mex atau dari kata Fibonacci, seperti uraian berikut.

5.1 Konstruksi Posisi-*P* dengan Rasio Mulia

Barisan Fibonacci yang dilambangkan dengan $\{F_n\}$di awali oleh 2 suku

$$F_0 = 0, \;\; F_1 = 1$$

dan untuk $n = 2, 3, 4, \ldots$, nilai F_n diperoleh dari relasi rekurensi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

Persamaan (1) disebut relasi rekurensi linear homogin order 2.

Perbandingan (rasio) bilangan Fibonacciyang ke-$(n+1)$ dengan bilangan Fibonacci ke-n untuk $n\ge 1$ menghasilkan barisan

$$1/1,\ 2/1,\ 3/2,\ 5/3,\ 8/5,\ 13/8, \ldots \text{ dst}$$

yang konvergen ke bilangan

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

atau dalam notasi desimal $\varphi = 1.618033988749894\ldots$, yang disebut rasio mulia (*golden ratio*). Pembuktiannya dapat dilihat pada berbagai buku teks dan situs internet, misalnya pada [5].

Posisi-*P* pertamadidefinisikan sebagai $(a_0,b_0) = (0, 0)$, yang disebut juga sebagai posisi-*P* mati.Dengan menggunakan rasio mulia φ, setiap posisi-*P* (a_n, b_n)dengan $n> 0$ bisa diperoleh dari nilai-nilai berikut

$$a_n=(\lfloor n\varphi \rfloor),\ b_n=(\lfloor n\varphi^2 \rfloor) \qquad (2)$$

Beberapanilai awal $n\varphi$, $n\varphi^2$,$\lfloor n\varphi \rfloor$,$\lfloor n\varphi^2 \rfloor$danpasangan (a_n, b_n) yang diperoleh disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3.1Pasangan $(\lfloor n\varphi \rfloor, \lfloor n\varphi^2 \rfloor)$ sebagai Posisi-*P* Permainan Wythoff

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**…**
$n\varphi$	0	1,618	3,236	4,854	6,472	8,090	9,708	11,326	…
$\lfloor n\varphi \rfloor$	0	1	3	4	6	8	9	11	…
$n\varphi^2$	0	2,618	5,236	7,854	10,472	13,090	15,708	18,326	…
$\lfloor n\varphi^2 \rfloor$	0	2	5	7	10	13	15	18	…

Karena bisa dibuktikan bahwa untuk setiap n berlaku $b_n = a_n + n$ [6] sehingga

$$(a_n, b_n) = (a_n, a_n + n). \qquad (3)$$

Dengan kata lain

$$(a_n, b_n) = (\lfloor n\varphi \rfloor, \lfloor n\varphi \rfloor + n). \qquad (4)$$

5.2 Konstruksi Posisi-*P* dengan Operator Mex dan Fungsi Sprague-Grundy

Penentuan posisi-*P* permainan Wythoff berdasarkan operator Mex dan fungsi Sprague-Grundy menggunakan papan kotak-kotak (seperti papan catur tetapi batas atas dan kanan tidak ada). Setiap kotak diisi dengan bilangan cacah (bulat tak negatif) berdasarkan definisi operator *Mex* dan fungsi Sprgue-Grundy.

Di awali dengan koordinat (0, 0), kotak selanjutnya diisi dengan bilangan cacah terkecil yang belum ada apabila apabila ditarik garis luruh dari kotak tersebut ke arah barat, barat daya, dan selatan). Jadi menggunakan operator *Mex* (*Minimum excluded*), akan diperoleh semua nilai di dalam kotak-kotak :

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋰
12	**12**	**13**	**14**	**15**	**11**	**9**	**16**	**17**	**18**	**19**	**7**	**8**	**10**	**…**
11	**11**	**9**	**10**	**7**	**12**	**14**	**2**	**13**	**17**	**6**	**5**	**15**	**8**	**…**
10	**10**	**11**	**9**	**8**	**13**	**12**	**0**	**15**	**16**	**17**	**18**	**5**	**7**	**…**
9	**9**	**10**	**11**	**12**	**8**	**7**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**6**	**19**	**…**
8	**8**	**6**	**7**	**10**	**1**	**2**	**5**	**3**	**4**	**15**	**16**	**17**	**18**	**…**
7	**7**	**8**	**6**	**9**	**0**	**1**	**4**	**5**	**3**	**14**	**15**	**13**	**17**	**…**
6	**6**	**7**	**8**	**1**	**9**	**10**	**3**	**4**	**5**	**13**	**0**	**2**	**16**	**…**
5	**5**	**3**	**4**	**0**	**6**	**8**	**10**	**1**	**2**	**7**	**12**	**14**	**9**	**…**
4	**4**	**5**	**3**	**2**	**7**	**6**	**9**	**0**	**1**	**8**	**13**	**12**	**11**	**…**
3	**3**	**4**	**5**	**6**	**2**	**0**	**1**	**9**	**10**	**12**	**8**	**7**	**15**	**…**
2	**2**	**0**	**1**	**5**	**3**	**4**	**8**	**6**	**7**	**11**	**9**	**10**	**14**	**…**
1	**1**	**2**	**0**	**4**	**5**	**3**	**7**	**8**	**6**	**10**	**11**	**9**	**13**	**…**
0	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**…**
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**…**

Gambar 1: Koordinat kotak angka 0 (nol) menunjukkan posisi-*P*

Koordinat kotak yang berisikan angka 0 (nol) menunjukkan posisi-*P* dari permainan Wythoff atau permainan Gerakan Ratu (*Queen's Move*).

5.3Konstruksi Posisi-*P* dengan Kata Fibonacci

Misalkan Σ^*adalah himpunan semua kata hingga atas alfabet$\Sigma = \{a, b\}$. Dengan mendefinisikan fungsi$\sigma : \Sigma^* \to \Sigma^*$yang memenuhi sifat:

i. $\sigma(a) = ab$ dan $\sigma(b) = a$,
ii. Untuk setiap kata $\mathbf{s} = s_1s_2\ldots s_k$ berlaku $\sigma(\mathbf{s}) = \sigma(s_1)\,\sigma(s_2)\ldots\sigma(s_k)$

Kata Fibonacci**s**yang didefinisikan sebagai limit

$$\mathbf{s} = \lim_{k\to\infty} \sigma^k(a).$$

Lebih jauh, untuk setiap k berlaku $\sigma^k(a)$ adalah bagian awal (*prefix*) dari **s**. Misalnya, kata $\sigma^5(a)$= *abaababaabaab*memberikan 13 simbol-simbol awal dari kata Fibonacci.

Dari kata Fibonacci, didefinisikan barisan pasangan bilangan bulat $(a_n, b_n)_{n\geq 0}$ dengan

a_n= posisi kemunculan huruf *a* ke-*n* kali dalam **s**; dan
b_n= posisi kemunculan huruf *b* ke-*n* kali dalam **s**;

Untuk memudahkan pencarian pasangan (a_n, b_n), diadopsi notasi $a_i(m)$ untuk simbol *a* di posisi ke-*m* yang muncul ke-*i* kalinya di dalam kata Fibonacci (demikian pula $b_j(n)$ untuk simbol *b* di posisi ke-*n* yang muncul ke-*j* kalinya) maka barisan di atas bisa ditulis ulang sebagai berikut

$$\sigma^5(a) = a_1(1)b_1(2)a_2(3)a_3(4)b_2(5)\,a_4(6)b_3(7)a_5(8)a_6(9)b_4(10)a_7(11)a_8(12)b_5(13).$$

Dari nilai $a_i(m)$ dan $b_j(n)$ disimpulkan $(a_n, b_n) = (m, n)$ adalah posisi-*P* permainan Wythoff. Jadi (a_1, b_1)= (1, 2), (a_2, b_2)= (3, 5), (a_3, b_3)= (4, 7), (a_4, b_4)= (6, 10), (a_5, b_5)= (8, 13). Jika dibuat dalam tabel akan diperoleh tabel berikut.

Tabel 3.2 Pasangan (a_n, b_n)sebagai Posisi-*P* Permainan Wythoff

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
a_n	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	…
b_n	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	…

Pada lampiran disajikan sebanyak 231 posisi-*P* awal dari permainan Wythoff.

6. Hubungan antara Permainan Wythoff dengan Beberapa Konsep Matematika

- Rasio Mulia

  Karena posisi-*P* permainan Wythoff berbentuk $(\lfloor n\varphi\rfloor, \lfloor n\varphi^2\rfloor)$, sudah jelas rasio mulia φ tak bisa dilepaskan dari konsep permainan Fibonacci.

- Relasi Rekurensi Linear Homogin

  Karena rasio mulia adalah akar tak negatif dari persamaan karakteristik

  $$f(x) = x^2 - x - 1$$

  untuk relasi rekurensi barisan Fibonacci

  $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

  maka ada hubungan antara permainan Wythoff dengan relasi rekurensi.

- Otomata

  Hubungan antara permainan Wythoff dengan otomata tergambar dari konstruksi posisi-*P* permainan melaluifungsiσ: $\Sigma^* \to \Sigma^*$di manaΣ^*merupakan himpunan semua kata hingga atas $\Sigma = \{a, b\}$ dan memenuhi sifat: $(a) = ab$ dan$(b) = a$.

7. Kesimpulan dan Saran

Adapun beberapa hal yang dapat disimpulkan dari hasil penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Posisi-*P* permainan Wythoff bisa dikonstruksi dengan paling sedikit tiga cara:
   i. Menggunakan rasio mulia dan konsep dua barisan Beatty yang salingkomplemen.
   ii. Menggunakan operator *Mex* dan fungsi Sprague-Grundy yang diturunkan berdasarkan permainan Gerakan Ratu.
   iii. Menggunakan kata Fibonacci yang diperoleh dari penerapan morfisma atasalfabet $\{a, b\}$.
2. Barisan Fibonacci bisa diperoleh dari kata Fibonacci.
3. Berdasarkan pengetahuan posisi-*P* dari permainan Wythoff, salah satu pemain, pemain 1 atau pemain 2 (tergantung posisi awal), bisa memilih langkah-langkah yang membawa ke arah kemenangan.
4. Ekuivalensi konstruksi posisi-*P* yang diturunkan dari fungsi Sprague-Grundy dengan konstruksi posisi-*P* yang diturunkan dari barisan atau kata Fibonacci adalah akibat ekuivalensi antara permainan Gerakan Ratu (*Queen's Move*) dengan permainan Wythoff.

Adapun beberapa saran dari penulisan jurnal ini adalah sebagai berikut:

1. Perlu penelitian lebih lanjut dari setiap konstruksi posisi-*P* permainan Wythoff yang diturunkan dari konsep matematis yang berbeda.
2. Walaupun salah satu pemain bisa memaksakan kemenangan berdasarkan pengetahuan posisi-*P* dari permainan Wythoff, tetapi di dalam praktek seorang pemain akan sangat sulit menghapal seluruh posisi-*P* sehingga disarankan pembuatan program computer untuk permainan Wythoff di mana salah satu pemain adalah computer yang bisa 'menghapal' ratusan ribu posisi-*P*.

Daftar Pustaka

[1] I.G. Connel, *A Generalization of Wythoff's Game,* University of Manitoba, 1959.

[2] L. Haryanto, R. Rakhman, A. Alimuddin, *Generalisasi Permainan Wythoff ke Permainan Tribonacci,* Universitas Hasanuddin, (dikirim ke JMSK).

[3] R. Honsberger, Ingenuity In Mathematics, Mathematical Association of America, United States of America, 1970.

[4] G. Nivasch, *More on the Sprague-Grundy function for Wythoff's game*, Weizmann Institute of Science in Rehovot, Israel, 2009.

[5] http://pages.pacificcoast.net/~cazelais/222/fib-limit.pdf, diakses tanggal 25 Mei 2013.