ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 1, 1-5, Juli 2013

Beberapa Karakteristik Fungsi Mobius

Nur Erawaty[1]

Abstrak

Fungsi Mobius adalah fungsi unik yang terdapat dalam teori bilangan dan transformasi Mobius dalam bidang Geometri. Fungsi ini mengelompokkan himpunan bilangan asli menjadi tiga kelompok bilangan. Aturan fungsi ini memiliki beberapa karakteristik khusus.

Kata Kunci: Fungsi Mobius, multiplikatif, bebas kuadrat, pembangkit.

1. Pendahuluan

Fungsi merupakan aturan pengawanan yang memetakan setiap unsur di dalam domain pada tepat satu unsur kodomain. Fungsi Mobius merupakan sebuah fungsi yang unik, dengan domain himpunan bilangan asli N. Sedangkan himpunan daerah hasil fungsi ini adalah hanya terdiri dari beberapa bilangan.Fungsi ini pertama kali dikemukakan oleh Mobius, lengkapnya August Ferdinan Mobius. Mobius adalah professor astronomi di Universitas Leipzig sekaligus sebagai direktur observatorium Leipzig. Meskipun menekuni bidang astronomi namun kiprah Mobius banyak ditemukan dalam bidang Matematika. Namanya terkenal ketika mengemukakan Pita Mobius (Mobius Strip) pada tahun 1858.

Pada tahun 1831, August Ferdinand Mobius membagi bilangan ke dalam 3 kelompok sebagai suatu fungsi jenis baru. Dilambangkan dengan huruf Yunani μ (mu) dan disebut fungsi Mobius.

Dalam kelompok "nol", Mobius menempatkan kelipatan dari bilangan kuadrat (kecuali 1) yaitu 4, 8, 9, 12, ... seterusnya. Dalam kelompok "negatif satu", Mobius menempatkan bilangan yang dapat difaktorkan ke dalam sejumlah bilangan ganjil bilangan-bilangan prima yang berbeda. Yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... dan seterusnya. Sedangkan dalam kelompok "positif satu", Mobius menempatkan semua bilangan yang memiliki sejumlah bilangan genap faktor-faktor bilangan prima yang berbeda. Untuk lengkapnya 1 ditempatkan dalam kelompok ini.

2. Pembahasan

Pembahasan dimulai dengan memberikan beberapa definisi fungsi Mobius.

Definisi Fungsi Mobius.

Dilambangkan dengan huruf Yunani μ, yang identik dengan huruf m dan didefinisikan sebagai berikut :

a. *Domain Fungsi Mobius adalah himpunan bilangan asli N.*
b. $\mu(1) = 1$

[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, email: nurerawaty@gmail.com*

c. *$\mu(n)$ = 0 jika n memiliki faktor yang merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat.*
d. *$\mu(n)$ = -1 jika n adalah bilangan prima atau memiliki sejumlah bilangan ganjil faktor bilangan prima.*
e. *$\mu(n)$ = 1 jika n memiliki sejumlah bilangan genap faktor bilangan prima yang berbeda.*

Beberapa nilai $\mu(n)$,

$\mu(2)=-1$	$\mu(3)=-1$	$\mu(4)=0$
$\mu(5)=-1$	$\mu(6)=1$	$\mu(7)=-1$
$\mu(8)=0$	$\mu(9)=0$	$\mu(10)=1$
$\mu(11)=0$	$\mu(12)=0$	$\mu(13)=-1$
$\mu(14)=1$	$\mu(15)=1$	$\mu(16)=0$
$\mu(17)=-1$	$\mu(18)=0$	$\mu(19)=-1$
$\mu(20)=0$		

Perhatikan bahwa $\mu(48)=0$, $\mu(49)=0$ dan $\mu(50)=0$ karena 48, 49 dan 50 dapat dibagi oleh bilangan kuadrat. Bilangan-bilangan yang masuk kelompok "nol" adalah 4, 8, 9, 12, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 28, 32, 36, 40, 44, 45, 48, 49, 50, 52, 54, 56, 60, 63, 64, 68, ...

Bilangan- bilangan yang masuk kelompok "negatif satu" adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 30, 31, 37, 41, 42, 43, 47, 53, 59, 61, 66, 67, 70, ...

Perhatikan $\mu(29)=-1$, $\mu(30)=-1$ dan $\mu(31)=-1$, ini merupakan 3 bilangan berurutan yang memiliki nilai fungsi Mobius negatif satu. Karena untuk bilangan keempat dapat dibagi 4, sehingga dalam kelompok ini tidak akan ditemukan lebih dari 3 bilangan yang berurutan dalam kelompok ini. Bilangan-bilangan prima yang berada dalam kelompok ini, termasuk bilangan-bilangan

66 (2x3x11)
665 (5x7x19)
6654 (2x3x1109)
...
66549954999999999 (3x11x61x2238013x14772071)
665499549999999999 (3x2063x107529415091291)

Bilangan-bilangan dalam kelompok "positif satu" adalah 1, 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46, 51, 55, 57, 58, 62, 65, 69, ... Termasuk juga bilangan-bilangan berikut ini,

6 (2x3)
69 (3x23)
699 (3x233)
6999 (3x2333)
69999069090909090990909090

berada dalam kelompok ini.

Secara ekivalen, fungsi ini dapat dituliskan dengan cara berbeda. Misalkan $\omega(n)$ adalah banyaknya bilangan prima (berbeda) yang membagi n dan $\Omega(n)$ adalah banyaknya faktor prima dari n, dihitung dengan multiplisitasnya. Sehingga jelas, $\omega(n) \leq \Omega(n)$.

Sehingga

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} = (-1)^{\Omega(n)} jika\ \omega(n) = \Omega(n) \\ 0 \qquad\qquad\qquad jika\ \omega(n) < \Omega(n) \end{cases}$$

Dari definisi ini juga menunjukkan bahwa μ(1) =1 (karena 1 tidak memilikifaktor prima atau dikatakan bahwa 1 memiliki sejumlah genap (nol) faktor prima) sedangkan $\mu(0)$ tidak didefinisikan.

Misalkan a, $b \in N$ dengan a dan b saling prim.

Jika a atau b memiliki faktor bilangan kuadrat maka

μ(a)=0 atau μ(b)=0

Artinya bahwa *ab* juga memiliki faktor bilangan kuadrat sehingga $\mu(ab)$=0
Sehingga $\mu(ab)$=$\mu(a)\mu(b)$ untuk a atau b yang memiliki faktor bilangan kuadrat
Misalkan a dan b tidak memiliki faktor bilangan kuadrat. Misalkan pula k = banyaknya faktor dari a

t = banyaknya faktor dari b

sehingga jika k dan t dua-duanya ganjil ($\mu(a)$=$\mu(b)$=-1) atau dua-duanya genap ($\mu(a)$=μ(b)=1) maka jumlah faktornyanya adalah genap ($\mu(ab)$=1), sehingga berlaku $\mu(ab)$=$\mu(a)$μ(b).
dan jika k dan t salah satunya ganjil dan yang lainnya genap atau sebaliknya maka jumlah faktornya adalah ganjil, sehingga berlaku pula $\mu(ab)$=$\mu(a)$μ(b).
Sedangkan jika a dan b tidak saling prim artinya ab mengandung faktor kuadrat sehingga $\mu(ab)$=0.
Sehingga beberapa kesimpulan yang diperoleh diberikan berikut ini.

Proposisi 1.
Misalkan a, b $\in$ N dengan a dan b saling prim, berlaku $\mu(ab)$=$\mu(a)\mu(b)$

Ini menunjukkan bahwa fungsi Mobius bersifat multiplikatif.

Jika d merupakan pembagi n, maka berlaku

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 \text{ jika } n = 1 \\ 0 \text{ jika } n > 1 \end{cases}.$$

Definisi Bilangan Bebas Kuadrat (*Square-free Number*)
Bilangan bebas kuadrat merupakan bilangan asli yang tidak memiliki pangkat lebih dari 1 dalam faktorisasi primnya.

Dengan kata lain, x bilangan bebas kuadrat jika faktorisasi primanya tidak memuat faktor prima yang berulang.Jika $\mu(n)=1$ berarti n bebas kuadrat dengan sejumlah genap faktor prima. Dan$\mu(n)=-1$ jika n bebas kuadrat dengan sejumlah ganjil faktor prima. Sedangkan jika $\mu(n)=0$ artinya n tidak bebas kuadrat.
Fungsi Mobius memiliki fungsi pembangkit, yakni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

untuk$\Re[s] > 1$. Hasil ini diperoleh dari rumus Euler's product

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\zeta(s)} &= \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^s}\right) \\
&= \left(1-\frac{1}{p_1^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_2^s}\right)\left(1-\frac{1}{p_3^s}\right)\cdots \\
&= 1-\left(\frac{1}{p_1^s}+\frac{1}{p_2^s}+\frac{1}{p_3^s}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{p_1^s\,p_2^s}+\frac{1}{p_1^s\,p_3^s}+\ldots+\frac{1}{p_2^s\,p_3^s}+\frac{}{p}\right. \\
&= 1-\sum_{0<i}\frac{1}{p_i^s}+\sum_{0<i<j}\frac{1}{p_i^s\,p_j^s}-\sum_{0<i<j<k}\frac{1}{p_i^s\,p_j^s\,p_k^s}+\ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}
\end{aligned}$$

Fungsi pembangkit yang lain diberikan sebagai berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\,x^n}{1-x^n} = x$$

untuk $|x| < 1$.

Beberapa jumlahan tak hingga dari Fungsi Mobius,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n} &= 0 \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)\ln n}{n} &= -1 \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\mu(n)|}{n^2} &= \frac{15}{\pi^2} = 1.51981775\ldots \\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{\{n:\mu(n)=-1\}}}{n^2} &= \frac{9}{2\,\pi^2} = 0.45594532\ldots
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{\{n:\mu(n)=1\}}}{n^2} = \frac{21}{2\pi^2} = 1.06387242\ldots$$

sebagaimana jumlahan dari pembagi *d*, *d*|*n*

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)},$$

di mana $\omega(n)$ merupakan banyaknya faktor prim yang berbeda dari *n*.

$\mu(n)$ memenuhi hasil kali tak hingga,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{\mu(n)/n} = e^{-x}$$

untuk $|x| < 1$.

3. Kesimpulan

Dari penjelasan di atas, fungsi Mobius merupakan fungsi yang unik dan memiliki karakteristik khusus, yaitu

1. Fungsi pembangkit untuk fungsi Mobius,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)\, x^n}{1 - x^n} = x$$

2. Fungsi Mobius bersifat multiplikatif yakni berlaku $\mu(ab)=\mu(a)\mu(b)$
3. Jumlahan dari pembagi *d*,

$$\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^{\omega(n)},$$

Daftar Pustaka

[1] Ed Pegg Jr., 2003. The Mobius Function (and Squarefree Numbers). *MAA Online Math Games.*

[2] Klimov N.I., 2001. Mobius Function, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN 978-1556080104, http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=m/m064280).