ISBN:1858-1382

J M S K

*Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi*
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
*Vol. 8, No.1, 1-11, Juli 2011*

# Perluasan Teorema Cayley-Hamilton pada Matriks $m \times n$

**Nur Erawati, Azmimy Basis Panrita***

**Abstrak**

Teorema Cayley-Hamilton menyatakan bahwa setiap matriks bujur sangkar memenuhi persamaan karakteristiknya. Jika $p(\lambda)$ adalah polinom karakteristik dari sebuah matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ maka $p(\boldsymbol{A}) = 0$. Dalam tulisan ini akan dibahas bukti dari teorema Cayley-Hamilton dan perluasannya pada matriks $m \times n$ serta penerapan teorema pada sistem matriks $m \times n$.

**Kata Kunci:** *Teorema Cayley-Hamilton, matriks $m \times n$.*

## 1. Pendahuluan

Setiap matriks bujur sangkar dengan elemen real maupun kompleks memenuhi persamaan karakteristiknya. Dengan kata lain jika $p(\lambda)$ adalah polinom karakteristik dari sebuah matriks bujur sangkar $A$ maka $p(A) = 0$. Pertama kali dikemukakan oleh Arthur Cayley pada tahun 1858. Walaupun Cayley hanya membuktikannya untuk matriks $3 \times 3$, dan berdasarkan hal tersebut Cayley yakin bahwa bukti tersebut berlaku untuk matriks $n \times n$. Lima tahun sebelumnya, William Rowan Hamilton telah memperlihatkan bahwa sebuah transformasi rotasi pada ruang berdimensi tiga memenuhi persamaan karakteristiknya. Dengan jelas, baik Cayley ataupun Hamilton pernah menerbitkan sebuah bukti dari ide tersebut secara umum. Ide tersebut kemudian dinamakan teorema Cayley-Hamilton atau teorema Hamilton-Cayley. Teorema ini adalah salah satu teori matriks yang sangat kuat dan klasik. Banyak aplikasi yang hasilnya diperoleh dari torema ini. Bukti lain dari teorema Cayley-Hamilton dikeluarkan pada tahun 1878 oleh George Frobenius dan banyak orang lain setelah itu. Teorema Cayley-Hamilton telah diperluas ke dalam matriks $m \times n$, matriks blok dan pasangan matriks blok.

Teorema Cayley-Hamilton dan generalisasinya juga telah digunakan dalam sistem kontrol, jaringan listrik, sistem dengan waktu tunda, sistem singular, sistem linear 2-D dan lain-lain. Selain itu teorema Cayley-Hamilton telah diperluas sampai ke dimensi-$n$ matriks polinom real dan sistem linear waktu diskrit dengan waktu tunda [4]. Berdasarkan uraian di atas maka penulis ingin mempelajari tentang teorema Cayley-Hamilton dan salah satu perluasan baru dari teorema Cayley-Hamilton yaitu pada matriks $m \times n$. Tulisan ini juga menampilkan bukti dari Teorema Cayley-Hamilton.

## 2. Landasan Teori

### 2.1. Matriks Blok

**Definisi 1.**

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

*Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dalam matriks.*

Diberikan sebuah matriks $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{m,n}$. Jika beberapa baris dan kolom dihapus, diperoleh sebuah matriks baru yang dinamakan submatriks dari $\boldsymbol{A}$.

**Contoh 1.** Misalkan diberikan matriks:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks tersebut dapat dipatrisi menjadi

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

atau

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_{11}} & \boldsymbol{A_{12}} \\ \boldsymbol{A_{21}} & \boldsymbol{A_{22}} \end{bmatrix},$$

dimana $\boldsymbol{A_{11}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_{12}} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A_{21}} = [2 \quad -1]$, $\boldsymbol{A_{22}} = [0 \quad 0]$.

## 2.2. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

**Definisi 2.**
*Misalkan* $\mathbf{A}$ *adalah suatu matriks* $n \times n$. *Skalar* $\lambda$ *disebut nilai eigen atau nilai karakteristik dari* $\mathbf{A}$ *jika terdapat suatu vektor tak nol* $\mathbf{x}$, *sehingga* $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$. *Vektor* $\mathbf{x}$ *disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari* $\lambda$.

Sembarang kelipatan tak nol dari vektor eigen $\mathbf{x}$ akan menjadi vektor eigen, karena $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{Ax} = \alpha\mathbf{Ax} = \lambda(\alpha\mathbf{x})$. Persamaan $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ dapat dituliskan dalam bentuk

$$(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Menurut teori sistem persamaan linear $\lambda$ adalah nilai eigen dari $\mathbf{A}$ jika dan hanya jika (1) memiliki suatu penyelesaian non trivial. Himpunan penyelesaian dari persamaan (1) adalah $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, yang merupakan ruang bagian dari $R^n$. Jadi, jika adalah nilai eigen dari $\mathbf{A}$, maka $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ dan sembarang vektor tak nol dalam $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda$. Ruang bagian $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ dinamakan ruang eigen yang berhubungan dengan nilai eigen $\lambda$.

Persamaan (1) akan mempunyai penyelesaian non trivial jika dan hanya jika $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ singular atau

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \tag{2}$$

Jika determinan pada Persamaan (2) diuraikan, maka diperoleh suatu polinom berderajat $n$ dalam peubah $\lambda$ atau $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$.

Polinom di atas disebut *polinom karakteristik,* dan persamaan (2) disebut persamaan karakteristik untuk matriks $\mathbf{A}$. Akar dari polinom karakteristik adalah nilai eigen dari $\mathbf{A}$. Jika dihitung akar menurut kelipatannya, maka polinom karakteristik pasti akan mempunyai $n$ akar. Jadi, $\mathbf{A}$ akan mempunyai $n$ nilai eigen dimana beberapa di antaranya kemungkinan akan berulang dan beberapa nilai eigen lainnya kemungkinan berupa bilangan kompleks. Untuk mengatasi kasus terakhir, perlu memperluas medan skalar menjadi bilangan kompleks serta memperbolehkan dipergunakannya entri-entri kompleks untuk vektor dan matriks.

**Contoh 2.** Misalkan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Karena

$$\mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\mathbf{x}.$$

Dari persamaan ini terlihat bahwa $\lambda = 3$ adalah nilai eigen dari $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{x} = (2,1)^T$ merupakan vektor eigen dari $\lambda$ dan $(4,2)^T$ juga merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan $\lambda = 3$, karena

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

## 2.3. Minors, Kofaktor dan Adjoin Matriks

**Definisi 3.**
*Jika **A** adalah suatu matriks bujur sangkar, maka minor dari entri $a_{ij}$ dinyatakan sebagai $M_{ij}$ dan didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang tersisa setelah baris $ke - i$ dan kolom $ke - j$ dihilangkan dari **A**. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinotasikan dengan $C_{ij}$ dan disebut sebagai kofaktor dari entri $a_{ij}$.*

**Definisi 4.**
*Jika **A** adalah matriks $n \times n$ sebarang dan $C_{ij}$ adalah kofaktor dari $a_{ij}$, maka matriks*

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

*disebut matriks kofaktor dari **A.** Transpose dari matriks tersebut disebut adjoin dari **A** dinotasikan dengan $adj(\boldsymbol{A})$.*

Misalkan diberikan sebuah matriks $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ sehingga diperoleh: $|\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$

atau

$$p(\lambda) = |\lambda I - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^3$$

$$adj(\lambda I - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda^2 - (a_{22} + a_{33})\lambda + a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{12}\lambda + a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{13}\lambda + a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{21}\lambda + a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & \lambda^2 - (a_{11} + a_{33})\lambda + a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{23}\lambda + a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{31}\lambda + a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{32}\lambda + a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{vmatrix}$$

$$adj(\lambda I - \boldsymbol{A}) = \lambda^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} -(a_{22} + a_{33}) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -(a_{11} + a_{33}) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{11} + a_{22}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{vmatrix}$$

**Teorema 1**. Lihat [3].
*Misalkan $A^+$ adalah adjoint dari $A$, maka $AA^+ = A^+A = det(A)I$.*

## 2.4. Sistem Matriks Bujur Sangkar

Jika determinan pada persamaan (2) diuraikan, maka diperoleh suatu bentuk

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \tag{3}$$

dimana $x(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ adalah vektor masukan dan $A = A(x,t) \in \mathbb{R}^{m\times m}, B = B(x,t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Telah diketahui polinomial karakteristik untuk sistem linier dapat diperluas untuk sistem non linier persamaaan (3) sebagai berikut.

**Definisi 5.** Lihat [4].

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det[I_m\lambda - A_1(x,t)] \\ &= \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned} \tag{4}$$

*dengan koefisien $a_k = a_k(x,t),\ k = 0,1,\dots,n-1$ $bergantung\, pada\ x\, dan\, t$ adalah polinomial karakteristik dari sistem (3). Persamaan $p(\lambda) = 0$ adalah polinomial karakteristik dari sistem (3).*

# 3. Pembahasan

## 3.1. Bukti Teorema Cayley-Hamilton

**Teorema 2.** Lihat [6].
*Misalkan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks persegi $n \times n$, dan*

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$$

*adalah polinom karakteristik dari $\boldsymbol{A}$, maka $p(\boldsymbol{A}) = a_0 + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \boldsymbol{A}^n$, dikatakan matriks $\boldsymbol{A}$ memenuhi persamaan karakteristiknya.*

Banyak cara untuk membuktikan teorema Cayley-Hamilton, salah satu cara yang cukup mudah dipahami adalah pembuktian yang diberikan dalam paper ini.

**Bukti:**
Perhatikan bahwa untuk sembarang matriks bujur sangkar $\boldsymbol{A}$ berlaku $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$, dengan $\boldsymbol{A}^{+}$ adalah adjoint dari $\boldsymbol{A}$**.** Persamaan $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = det(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$ berlaku untuk semua matriks bujur sangkar, maka pasti berlaku untuk matriks $\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ sehingga dapat dituliskan $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{+} = det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{I} = p(\lambda)\boldsymbol{I}$**.**

Entri-entri dari $(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{+}$ adalah polinom berderajat $n - 1$. Karena itu, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{+}$ dapat ditulis sebagai sebuah polinom $\lambda$ berderajat $n - 1$ dengan koefisien berbentuk matriks, yaitu

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{+} = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A}_1\lambda + \boldsymbol{A}_2\lambda^2 + \cdots + \boldsymbol{A_{n-1}}\lambda^{n-1} \tag{5}$$

dengan $\boldsymbol{A_0}, \boldsymbol{A_1}, \dots, \boldsymbol{A}_{n-1}$ adalah koefisien berbentuk matriks. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{I} &= (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})^{+} \\ &= (\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{A_1}\lambda + \boldsymbol{A_2}\lambda^2 + \cdots + \boldsymbol{A_{n-1}}\lambda^{n-1}) \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{A_0} + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{A_0})\lambda + \cdots + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_{n-1}} - \boldsymbol{A_{n-2}})\lambda^{n-1} - \boldsymbol{A_{n-1}}\lambda^n \end{aligned} \tag{6}$$

Karena $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n$,
maka

$$p(\lambda)\boldsymbol{I} = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{I}\lambda + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{I}\lambda^{n-1} + \boldsymbol{I}\lambda^n \tag{7}$$

Dengan menyamakan kedua persamaan di atas, yaitu (7) dan (6), diperoleh

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_0} + (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{A}_0)\lambda + \cdots + \boldsymbol{A_{n-1}}\lambda^{n-1} - \boldsymbol{A_{n-1}}\lambda^n = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{I}\lambda + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{I}\lambda^{n-1} + \boldsymbol{I}\lambda^n. \tag{8}$$

Dengan menyamakan koefisien dari $\lambda^k$pada ruas kiri dan ruas kanan diperoleh $n + 1$ persaman sebagai berikut.

| | | |
|---|---|---|
| (0) | $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_0} = a_0\boldsymbol{I}$ | dari suku konstan |
| (1) | $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{A}_0 = a_1\boldsymbol{I}$ | suku linear |
| (2) | $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_2} - \boldsymbol{A_1} = a_2\boldsymbol{I}$ | dari koefisien $\lambda^2$ |
| | $\vdots$ | |
| $(n-1)$ | $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_{n-1}} - \boldsymbol{A_{n-2}} = a_{n-1}\boldsymbol{I}$ | dari koefisien $\lambda^{n-1}$ |
| $(n)$ | $-\boldsymbol{A_{n-1}} = \boldsymbol{I}$ | dari koefisien $\lambda^n$. |

Jika persamaan $ke - i$ dikalikan dengan $\boldsymbol{A^i}(i \geq 0)$dan menghasilkan $n + 1$ dan persamaan berikut

| | | |
|---|---|---|
| (0) | $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_0}$ | $= a_0\boldsymbol{I}$ |
| (1) | $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_1} - \boldsymbol{A}_0)\boldsymbol{A}$ | $= a_1\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$ |
| (2) | $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A_2} - \boldsymbol{A_1})\boldsymbol{A}^2$ | $= a_2\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^2$ |
| | | $\vdots$ |

$$\begin{array}{ll} (n-1) & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A_{n-1}} - \boldsymbol{A_{n-2}} = a_{n-1}\boldsymbol{I} \\ (n) & -\boldsymbol{A_{n-1}} = \boldsymbol{I} \end{array}$$

Kemudian ditambahkan, maka jumlah ruas kiri adalah 0. Sedangkan jumlah ruas kanan adalah

$$p(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{I}\boldsymbol{A} + \cdots + a_{n-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n-1}} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^n .$$

Karenanya, $p(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}.$ ■

## 3.2. Perluasan Teorema Cayley-Hamilton untuk matriks $\boldsymbol{m \times n}$

**Teorema 3.**
*Misalkan*

$$A = [A_1 \quad A_2] \in \mathbb{R}^{m\times n},\ A_1 \in \mathbb{R}^{m\times m},\ A_2 \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)},\ (n > m), \qquad (9)$$

*dan misalkan pula*

$$p(\lambda) = det[\boldsymbol{I_m}\lambda - \boldsymbol{A_1}] = \textstyle\sum_{i=0}^{m} a_i\lambda^i \qquad (a_m = 1)$$
$$= \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \qquad (10)$$

*adalah polinomial karakteristik dari $\boldsymbol{A_1}$, maka*

$$\textstyle\sum_{i=0}^{m} a_i[\boldsymbol{A}_1^{n+i-m} \quad \boldsymbol{A}_1^{n+i-m-1}\boldsymbol{A_2}] = \boldsymbol{0_{mn}}, \qquad (11)$$

*dimana $\boldsymbol{0_{mn}}$ adalah matriks nol $(m \times n)$.*

**Bukti:**

Pertama akan ditunjukkan bahwa $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^k & \boldsymbol{A}_1^{k-1}\boldsymbol{A}_2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
Dengan menggunakan induksi matematika pada $k$, ikuti langkah berikut.

Untuk $k = 1$, berlaku

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^1 & \boldsymbol{A}_1^0\boldsymbol{A}_2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Asumsikan benar untuk $k = n$, yaitu

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^n & \boldsymbol{A}_k^{n-1}\boldsymbol{A}_2 \\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan benar untuk $k = n + 1$.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{A_2} \\ 0 & 0\end{bmatrix}^n \begin{bmatrix}\boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{A_2} \\ 0 & 0\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{A_1^n} & \boldsymbol{A_1^{n-1}}\boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}\boldsymbol{A_1^{n+1}} & \boldsymbol{A_1^n}\boldsymbol{A_2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^k & \boldsymbol{A}_1^{k-1}\boldsymbol{A}_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk } k = 1,2,3 \dots n. \tag{12}$$

Dengan menggunakan persamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_m\lambda - \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-m}\lambda \end{bmatrix} &= \lambda^{n-m} det[\boldsymbol{I}_m\lambda - \boldsymbol{A}_1] \qquad (13) \\ &= \lambda^{n-m}(\lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0) \\ &= \lambda^n + a_{m-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda^{n-m+1} + a_0\lambda^{n-m} \\ &= \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^{n+i-m}. \end{aligned}$$

Misalkan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ suatu matriks bujur sangkar. Dengan menggunakan Teorema 2, diperoleh

$$p(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=0}^{m} a_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{n+i-m} = \boldsymbol{0}_{nn} \qquad (a_m = 1). \tag{14}$$

Substitusi persamaan (7) ke persamaan (14) menghasilkan

$$p(A) = \sum_{i=0}^{m} a_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{n+i-m} & \boldsymbol{A}_1^{n+i-m-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}_{\boldsymbol{mn}}. \tag{15}$$

Dengan hanya mempertimbangkan baris pertama dari persamaan (15) maka diperoleh persamaan (11).■

Teorema 3 berlaku untuk pada matriks persegi $m \times n$ dimana $n > m$. Untuk kasus $m > n$ maka digunakan Teorema 4 di bawah ini.

**Teorema 4.**
*Misalkan* $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$ *dan misalkan polinom karakteristik dari* $A_1$ *bentuknya seperti pada persamaan (10), maka*

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{\boldsymbol{m+i-n}} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1^{\boldsymbol{m+i-n+1}} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Langkah untuk membuktikan teorema ini sama dengan langkah-langkah pembuktian Teorema 3.

**Bukti:**
Pertama akan ditunjukan $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^k & 0 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1^{k-1} & 0 \end{bmatrix}$.
Dengan menggunakan induksi matematika pada $k$, perhatikan langkah berikut.
Untuk $k = 1$, diperoleh

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^1 & 0 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1^0 & 0 \end{bmatrix},$$

Asumsikan benar untuk $k = n$, yaitu

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{2}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_k^{n-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}.$$

Akan ditunjukkan benar untuk $k = n + 1$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2} & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1^{n-1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1^{n+1}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2A_1^n} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & 0 \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1^k} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2A_1^{k-1}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \text{untuk } k = 1,2,3 \dots . \tag{17}$$

Dengan menggunakan persamaan (10) diperoleh

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n\lambda - \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{I}_{m-n}\lambda \end{bmatrix} &= \lambda^{m-n} det[\boldsymbol{I_m}\lambda - \boldsymbol{A_1}] \\ &= \textstyle\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^{n+i-m}. \end{aligned} \tag{18}$$

Misal $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ suatu matriks bujur sangkar. Dengan menggunakan Teorema 2 diperoleh

$$\textstyle\sum_{i=0}^{m} a_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{A_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A_2} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}^{m+i-n} = \boldsymbol{0}_{mm} \qquad (a_m = 1) \tag{19}$$

Substitusi persamaan (12) ke persamaan (14) menghasilkan

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{m+i-n} & 0 \\ \boldsymbol{A_2}\boldsymbol{A}_1^{m+i-n-1} & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0_{mn}} \tag{20}$$

Dengan hanya mempertimbangkan kolom pertama dari persamaan (20) maka diperoleh persamaan (16).■

## 3.3. Penerapan Teorema Cayley-Hamilton untuk *Nonlinear time-varying System*

### 3.3.1 Sistem Matriks

Teorema Cayley-Hamilton dapat diterapkan pada sistem matriks baik itu sistem matriks bujur sangkar dan sistem matriks $m \times n$.

**Teorema 5**.
*Sistem matriks* $A(x,t)$ *memenuhi persamaan*

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \boldsymbol{A}^{i+k}(x,t) = \boldsymbol{0}_m, \quad k = 0,1,\dots. \quad (a_m = 1). \tag{21}$$

Perhatikan sebuah sistem matriks $\boldsymbol{A}(x,t)$ dengan jumlah kolom $n$ lebih besar dari jumlah baris $m$, $n > m$,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}(x,t) = [\boldsymbol{A_1}(x,t) \quad \boldsymbol{A_2}(x,t)] \in \mathbb{R}^{m\times n}, \\ &\boldsymbol{A_1}(x,t) \in \mathbb{R}^{m\times m}, \quad \boldsymbol{A_2}(x,t) \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det[I_m\lambda - A_1(x,t)] \\ &= \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \end{aligned} \tag{23}$$

dimana koefisien $a_k = a_k(x,t), k = 0,1,\dots,n-1$ bergantung pada $x$ dan $t$.

**Teorema 6.**
*Misalkan polinomial karakteristik dari* $A_1(x,t)$ *mempunyai bentuk pada persamaan* (23), *maka matriks* (22) *memenuhi persamaan*

$$\sum_{i=0}^{m} a_i[\boldsymbol{A}_1^{n+i-m}(x,t) \quad \boldsymbol{A}_1^{n+i-m-1}(x,t)\boldsymbol{A_2}(x,t)] = \boldsymbol{0_{mn}} \qquad (a_n = 1), \tag{24}$$

*dimana* $\boldsymbol{0_{mn}}$ *adalah matriks nol* $m \times n$.

**Contoh 3.**
Perhatikan sistem matriks $2 \times 3$, yaitu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(x,t) &= [\boldsymbol{A_1}(x,t) \quad \boldsymbol{A_2}(x,t)] \\ &= \left[\begin{array}{cc:c} e^{-t}sinx_1 & e^{-2t}cosx_2 & x_2sinx_1 \\ -e^t cosx_2 & sinx_1 & x_1e^{-t} \end{array}\right] \end{aligned} \tag{25}$$

dimana $x = [x_1 \quad x_2]^T$. Polinomial karakteristik matriks $\boldsymbol{A_1}(x,t)$ adalah

$$\begin{aligned} p_1(\lambda) &= det[\boldsymbol{I_n}\lambda - \boldsymbol{A_1}(x,t)] \\ &= det\begin{bmatrix} \lambda - e^{-t}sinx_1 & -e^{-2t}cosx_2 \\ e^{-t}cosx_2 & \lambda - sinx_1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^2 - (1+e^{-t})sinx_1\lambda + e^{-t}(sin^2x_1 + cos^2x_2) \\ &= \lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \end{aligned} \tag{26}$$

dimana

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1(x,t) = -(1+e^{-t})sinx_1, \\ a_0 &= a_0(x,t) = e^{-t}(sin^2x_1 + cos^2x_2). \end{aligned}$$

Dengan menerapkan Teorema 6 diperoleh

$$[\boldsymbol{A_1^3}(x,t) \quad \boldsymbol{A_1^2}(x,t)A_2(x,t)] + a_1(x,t)[\boldsymbol{A_1^2}(x,t) \quad \boldsymbol{A_1}(x,t)\boldsymbol{A_2}(x,t)] +$$
$$a_0(x,t)[\boldsymbol{A_1}(x,t) \quad \boldsymbol{A_2}(x,t)] .$$

$$[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{3}}(x,t) \quad \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{2}}(x,t)A_2(x,t)] = \begin{bmatrix} e^{-3t}sin^3x_1 - 2e^{-2t}sinx_1cos^2x_2 - e^{-t}sinx_1cos^2x_2 & e^{-4t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-3t}(cos^3x_2 - sin^2x_1cosx_2) + e^{-2t}sin^2cosx_2 & e^{-4t}x_1sinx_1cosx_2 + e^{3t}x_1sinx_1cosx_2 + e^{-2t}x_2sin^3x_1 - e^{-t}x_2sinx_1cos^2x_2 \\ cos^3x_2 - e^{-t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-2t}sin^2x_1cosx_2 - e^{t}sin^2x_1cosx_2 & -(e^{-2t}+e^{-3t})sinx_1cos^2x_2 - e^{-t}sinx_1cos^2x_2 + sin^3x_1 & e^{-t}x_1sin^2x_1 - e^{-2t}x_1cos^2x_2 - e^{t}x_2sin^2x_1cosx_2 - x_2sin^2x_1cosx_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1(x,t)[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{2}}(x,t) \quad \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}(x,t)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}(x,t)] = -(1+e^{-t})sinx_1 \begin{bmatrix} e^{-2t}sin^2x_1 - e^{-t}cos^2x_2 & e^{-3t}sinx_1cosx_2 + e^{-2t}sinx_1cosx_2 & e^{-3t}x_1cosx_2 + e^{-t}x_2 + e^{-t}x_2sin^2x_1 \\ -sinx_1cosx_2 - e^{-t}sinx_1cosx_2 & sin^2x_1 - e^{-t}cos^2x_2 & e^{-t}x_1sinx_1 - e^{-t}x_2sinx_1cosx_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t}sin^3x_1 + e^{-t}sinx_1cos^2x_2 - e^{-3t}sin^3x_1 + e^{-2t}sinx_1cos^2x_2 & -e^{-3t}sinx_1cosx_2 - e^{-2t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-4t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-3t}sin^2x_1cosx_2 & -e^{-3t}x_1sinx_1cosx_2 - e^{-t}x_2sinx_1 - e^{-t}x_2sin^3x_1 - e^{-4t}x_1sinx_1cosx_2 - e^{-2t}x_2sinx_1 - e^{-2t}x_2sin^3 \\ sin^2x_1cosx_2 + e^{-t}sin^2x_1cosx_2 + e^{-t}sin^2x_1cosx_2 + e^{-2t}sin^2x_1cosx_2 & -sin^3x_1 + e^{-t}sinx_1cos^2x_2 - e^{-t}sin^3x_1 + e^{-2t}sinx_1cos^2x_2 & -e^{-t}x_1sin^2x_1 + e^{-t}x_2sin^2x_1cosx_2 - e^{-2t}x_1sin^2x_1 + e^{-2t}x_2sin^2x_1cosx_2 \end{bmatrix}$$

$$a_0(x,t)[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{1}}(x,t) \quad \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{2}}(x,t)] = e^{-t}(sin^2x_1 + cos^2x_2)\begin{bmatrix} e^{-t}sinx_1 & e^{-2t}cosx_2 & x_2sinx_1 \\ -e^{t}cosx_2 & sinx_1 & x_1e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2t}sin^3x_1 + e^{-2t}sinx_1cos^2x_1 & e^{-3t}sin^2x_1cosx_2 + e^{-3t}cos^3x_1 & e^{-t}x_2sin^3x_1 + e^{-t}x_2sinx_1cos^2x_2 \\ -sin^2x_1cosx_2 - cos^3x_2 & e^{-t}sin^3x_1 + sinx_1cos^2x_2 & e^{-2t}x_1sin^2x_1 + e^{-2t}x_1cos^2x_2 \end{bmatrix}$$

Maka

$$\begin{bmatrix} e^{-3t}sin^3x_1 - 2e^{-2t}sinx_1cos^2x_2 - e^{-t}sinx_1cos^2x_2 & e^{-4t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-3t}(cos^3x_2 - sin^2x_1cosx_2) + e^{-2t}sin^2cosx_2 & e^{-4t}x_1sinx_1cosx_2 + e^{3t}x_1sinx_1cosx_2 + e^{-2t}x_2sin^3x_1 - e^{-t}x_2sinx_1cos^2x_2 \\ cos^3x_2 - e^{-t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-2t}sin^2x_1cosx_2 - e^{t}sin^2x_1cosx_2 & -(e^{-2t}+e^{-3t})sinx_1cos^2x_2 - e^{-t}sinx_1cos^2x_2 + sin^3x_1 & e^{-t}x_1sin^2x_1 - e^{-2t}x_1cos^2x_2 - e^{t}x_2sin^2x_1cosx_2 - x_2sin^2x_1cosx_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} e^{-2t}sin^3x_1 + e^{-t}sinx_1cos^2x_2 - e^{-3t}sin^3x_1 + e^{-2t}sinx_1cos^2x_2 & -e^{-3t}sinx_1cosx_2 - e^{-2t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-4t}sin^2x_1cosx_2 - e^{-3t}sin^2x_1cosx_2 & -e^{-3t}x_1sinx_1cosx_2 - e^{-t}x_2sinx_1 - e^{-t}x_2sin^3x_1 - e^{-4t}x_1sinx_1cosx_2 - e^{-2t}x_2sinx_1 - e^{-2t}x_2sin^3x_1 \\ sin^2x_1cosx_2 + e^{-t}sin^2x_1cosx_2 + e^{-t}sin^2x_1cosx_2 + e^{-2t}sin^2x_1cosx_2 & -sin^3x_1 + e^{-t}sinx_1cos^2x_2 - e^{-t}sin^3x_1 + e^{-2t}sinx_1cos^2x_2 & -e^{-t}x_1sin^2x_1 + e^{-t}x_2sin^2x_1cosx_2 - e^{-2t}x_1sin^2x_1 + e^{-2t}x_2sin^2x_1cosx_2 \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} e^{-2t}sin^3x_1 + e^{-2t}sinx_1cos^2x_1 & e^{-3t}sin^2x_1cosx_2 + e^{-3t}cos^3x_1 & e^{-t}x_2sin^3x_1 + e^{-t}x_2sinx_1cos^2x_2 \\ -sin^2x_1cosx_2 - cos^3x_2 & e^{-t}sin^3x_1 + sinx_1cos^2x_2 & e^{-2t}x_1sin^2x_1 + e^{-2t}x_1cos^2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu sistem matriks di atas memenuhi persamaan (24).

## Daftar Pustaka

[1] Anton H. dan Rorres C., 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*.

[2] Gantmacher F.R., 1960. *The Theory of Matrices*.

[3] Golberg J.L., 1991. *Matrix Theory with Applications*. McGraw-Hill Inc., New York.

[4] Kaczorek T., 2006. *New Extensions of The Cayley-Hamilton Theorem with Applications.* Technical University of Bialystok.

[5] Lancaster P. dan Tismenetsky M., 1985. *The Theory of Matrices, Second Edition with Aplications*.

[6] Landesman E.M. dan Hestenes M.R., 1992. *Linear Algebra for Mathematics Science and Engginеering*.

[7] Steven J.L, 1988. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Penerbit Erlangga, Jakarta.