ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 5, No.2, 93-98, Januari 2009

Bukti Teorema Sisa China dengan Menggunakan Ideal Maksimal

Nur Erawaty [†]

Abstrak

Sistem perkongruenan yang dapat dicari penyelesaiannya secara teori bilangan dasar ternyata dapat dibuktikan melalui teori-teori struktur aljabar khususnya dengan ideal maksimal.

Kata Kunci : *Ideal maksimal, system kongruen, teorema sisa*

1. Pendahuluan

Misalkan dipunyai system perkongruenan $x \equiv r_1 (\bmod\ a_1)$, $x \equiv r_2 (\bmod\ a_2)$, … $x \equiv r_n (\bmod\ a_n)$. Dengan teori bilangan dapat ditentukan solusinya. Dalam tulisan ini, solusi system perkongruenan di atas pun dapat ditentukan dengan menggunakan konsep-konsep struktur aljabar khususnya dengan konsep ideal maksimal pada gelanggang dengan unsur 1 dan konsep homomorfisma gelanggang.

2. Pembahasan

Definisi 1.
Misalkan R gelanggang. $I \subseteq R$ ideal I disebut ideal maksimal jika tidak ada ideal J, J subgroup normal R sedemikian sehingga $I \not\subset J \not\subset R$.

Teorema Isomorfisma.

1. Misalkan $f : R \to S$ homomorfisma gelanggang maka $\phi : R/\ker(f) \to f(R)$ terdefenisi dengan baik dan merupakan isomorfisma.
2. Jika $S \leq R$ dan $I \leq R$ maka $(S+I)/ \cong S/S \cap I$.
3. Misalkan $I \leq R$ maka pemetaan semua ideal R yang memuat I ke dalam himpunan semua ideal R/I merupakan bijeksi. Lebih lanjut jika $I \subseteq J \leq R$ maka $(R/I)/(J/I) \cong R/J$.

Proposisi berikut lebih memperjelas bagaimana ideal maksimal.

Proposisi 1.
Misal R gelanggang dan $I \neq R$ ideal R maka pernyataan berikut ekivalen

a. I ideal maksimal.

[†] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

b. $\langle I \cup \{x\} \rangle = I + \langle x \rangle = R$ untuk setiap $x \in R \setminus I$.

c. R/I gelanggang sederhana.

Bukti:

Jika $x \in R \setminus I$ maka $\langle I \cup \{x\} \rangle$ merupakan ideal yang lebih besar dan tidak sama dengan I , Jika I maksimal berarti $\langle I \cup \{x\} \rangle = R$. Ini menunjukkan bahwa pernyataan a mengakibatkan b. Sebaliknya, jika $\langle I \cup \{x\} \rangle = R$ untuk setiap $x \in R \setminus I$ maka tidak ada ideal sejati R yang sepenuhnya memuat I . Ini berarti I maksimal.

Terakhir ekivalensi pernyataan a dan c merupakan akibat langsung teorema isomorfisma 3 di atas.

Pada gelanggang komutatif dengan unsur 1, $\langle I \cup \{x\} \rangle = I + Rx$.

Contoh 1.

1. Ideal maksimal dari Z adalah ideal-ideal $\langle p \rangle = pZ$ dengan p bilangan prima.
2. Misal $C(R)$ gelanggang senua fungsi-fungsi kontinu $f : R \to R$ untuk setiap $x \in R$, himpunan $I_x = \{ f \in C(R) | f(x) = 0 \}$ merupakan ideal maksimal $C(R)$. Lebih lanjut, pemetaan $f \mapsto f(x)$ merupakan homomorfisma pada $C(R) \to R$ dengan kernel I_x.
   Dengan demikian $C(R)/I_x \cong R$ suatu lapangan dan juga gelanggang sederhana yang mengakibatkan bahwa I_x ideal maksimal.

Hasil berikut menjamin sumbangan besar ideal maksimal dalam gelanggang dengan unsur 1.

Proposisi 2.

Misal R gelanggang dengan unsur 1 dan $I \neq R$ ideal R maka I termuat dalam ideal maksimal R.

Bukti:

Misalkan I ideal di R dengan $I \neq R$.

Misal μ := { J subgroup normal R | J memuat I dan J subset sejati R }

$\mu \neq \phi$ karena $I \in \mu$.

μ merupakan himpunan terurut parsial dengan relasi $\subseteq$.

Misal C sebarang rantai di μ.

Definisikan $K = \bigcup_{J \in C} J$, maka untuk setiap $J \in C$, $J \subseteq K$.

Akan ditunjukkan $K \in \mu$.

1. Untuk setiap $J \in C$, $J \subseteq K$ dan J ideal di R $(J \neq \phi)$ dengan demikian $K \neq \phi$.
2. Misalkan $x, y \in K$ dan $r \in R$ sebarang, maka dapat dicari $J_1, J_2 \in C$ sedemikian sehingga $x \in J_1$, $y \in J_2$.
   Karena C rantai, maka berlaku $J_1 \subseteq J_2$ atau $J_2 \subseteq J_1$. Dengan demikian terdapat $J_3 = maks\{J_1,\ J_2\} \in C$ sedemikian sehingga $x, y \in J_3$.

Karena J_3 ideal maka $x, y \in J_3 \subseteq K,\ rx \in J_3 \subseteq K$.
Jadi K ideal di R .

3. Untuk setiap $J \in C,\ I \subseteq J \subseteq K$, jadi $I \subseteq K$.
4. Andaikan $K = R$, maka $I \in K$. Akibatnya ada $J_0 \in C$ sehingga $I \in J_0$ dan $J_0 = R$. Hal ini bertentangan dengan $J_0 \in \mu\ (J_0 \neq R)$. Jadi $K \neq R$.

Berdasarkan 1, 2, 3, 4 disimpulkan bahwa $K \in \mu$. Karena untuk setiap $J \in \mu,\ J \subseteq K$ maka K merupakan batas atas C .
Berdasarkan Lemma Zorn, maka μ memiliki unsur maksimal. Misalkan J_M unsur maksimal di μ. Perhatikan bahwa J_M ideal di R dengan $J_M \neq R$ dan $I \subseteq J_M$. J_M ideal maksimal. Jadi I termuat dalam suatu ideal maksimal.

Definisi 2.
Dua ideal I dan J pada gelanggang R disebut KOMAXIMAL jika $I + J = R$.

Teorema Sisa Cina (*Chinese Remainder Theorem*).
Misalkan R gelanggang dan $I_1, ..., I_n$ ideal-ideal di R sedemikian sehingga $R^2 + I_k = R$ untuk setiap k . Jika $I_1, ..., I_n$ KOMAXIMAL sepasang-sepasang, yaitu jika $I_r + I_s = R$ untuk semua $r \neq s$, maka

$$\phi : R \to R/I_1 x ... x\ R/I_n$$
$$r \mapsto (r + I_1, ..., r + I_n)$$

Merupakan homomorfisma pada dengan kernel $\phi = I_1 \cap ... \cap I_n$.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan ϕ homomorfisma.
   Ambil $x,\ y \in R$,
   $$\begin{aligned}\phi(x+y) &= (x + y + J,\ ...,\ x + I_n + y + I_n) \\ &= (x + I_1 + y + I_1,\ ...,\ x + I_n + y + I_n) \\ &= (x + I_1,\ ...\ x + I_n) + (y + I_1,\ ...,\ y + I_n) \\ &= \phi(x) + \phi(y)\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}\phi(xy) &= (xy + I_1,\ ...,\ xy + I_n) = ((x + I_1)(y + I_1),\ ...,\ (x + I_n)(y + I_n)) \\ &= (x + I_1,\ ...,\ x + I_n)(y + I_1,\ ...,\ y + I_n) = \phi(x)\phi(y)\end{aligned}$$
   Jadi ϕ pemetaan homomorfisma.
2. Akan ditunjukkan $\ker(\phi) = I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$.
   Ambil $x \in \ker(\phi)$ sebarang, maka $\phi(x) = 0 = (I_1,\ ...,\ I_n)$ padahal $\phi(x) = (x + I_1,\ x + I_2,\ ...,\ x + I_n)$ sehingga $(x + I_1,\ ...,\ x + I_2,\ ...,\ x + I_n) = (I_1,\ ..., I_n)$

akibatnya $x \in I_i$ untuk setiap i, atau $x \in I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$. Jadi
$Ker(\phi) \subseteq I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$.

Sebaliknya jika $x \in I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$ maka $x \in I_i$ untuk setiap i. Dengan demikian $x + I_i = I_i$ untuk setiap i.

$\phi(x) = (x + I_1, \ldots, x + I_n) = (I_1, \ldots, I_n) = 0$

Jadi $x \in Ker(\phi)$ dan $I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n \subseteq Ker(\phi)$

Disimpulkan bahwa $Ker(\phi) = I_1 \cap \ldots \cap I_n$.

3. Akan ditunjukkan ϕ pada.

   Klaim bahwa $R = I_1 + \bigcap_{k \neq 1} I_k$.

   Jelas $$R = I_1 + R^2 = I_1 + (I_1 + I_2)(I_1 + I_3) \subseteq \underbrace{I_1 + I_1^2 + I_1 I_3 + I_2 I_1}_{\subseteq I_1} + \underbrace{I_2 I_3}_{\subseteq I_2 \cap I_3}$$

   $\subseteq I_1 + (I_2 \cap I_3)$

   Tetapi,
   $$\begin{aligned} R &= I_1 + R^2 = I_1 + (I_1 + I_2 + I_3)(I_1 + I_4) \\ &= \underbrace{I_1 + I_1 I_4 + (I_2 \cap I_3) I_4}_{\subseteq I_1} + \underbrace{(I_2 \cap I_3) I_4}_{\subseteq I_2 \cap I_3 \cap I_4} \\ &\subseteq I_1 + (I_2 \cap I_3 \cap I_4) \end{aligned}$$

   Dan seterusnya, sehingga diperoleh $R = I_1 + (I_2 \cap I_3 \cap \ldots \cap I_n)$(klaim)

   Dengan cara yang sama
   $$R = I_2 + \bigcap_{k \neq 2} I_k = I_3 + \bigcap_{k \neq 3} I_k = \ldots = I_n + \bigcap_{k \neq n} I_k$$

   Misalkan $r_1, \ldots, r_n$ sebarang.

   Dapat dicari $a_k \in I_k$ dan $b_k \in \bigcap_{v \neq k} I_v$ sedemikian sehingga $r_k = a_k + b_k$

   Maka
   $r := b_1 + \ldots + b_n \equiv b_k \equiv r_k$ modulo I_k
   yang merupakan jalan lain untuk menyatakan
   $$\phi(r) = (r_1 + I_1, r_2 + I_2, \ldots, r_n + I_n)$$

Hasil ini terlihat abstrak, tapi ketika dikhususkan untuk ideal-ideal di Z, diperoleh hasil penting teori bilangan dasar yang menyangkut penyelesaian dari sistem perkongruenan.

Contoh 2.

Misalkan bahwa bilangan-bilangan asli $a_1, \ldots, a_n$ relatif prim.

Diberikan sebarang bilangan bulat $r_1, \ldots, r_n$ sehingga dapat ditentukan bilangan bulat m sedemikian sehingga

$$m \equiv r_1 \text{ mod } a_1$$
$$m \equiv r_2 \text{ mod } a_2 \quad (*)$$
$$\dots$$
$$m \equiv r_n \text{ mod } a_n$$

Lebih jauh, jika m dan m' dua solusi dari sistem perkongruenan di atas $(*)$ maka $m \equiv m'$ mod $a_1 a_2 \dots a_n$.

Bukti:
Dengan mengaplikasikan teorema sisa china dengan $R \cong Z$ dan $I_k = a_k Z$ untuk mendapatkan $(*)$. Perhatikan bahwa $I_1 \cap \dots \cap I_n = a_1 Z \cap a_2 Z \cap \dots \cap a_n Z = (a_1 a_2 \dots a_n) Z$, karena $a_1, \dots, a_n$ relatif prim. Sehingga diperoleh $m \equiv m'$ mod $a_1 a_2 \dots a_n$.

Contoh 3.
Tentukan semua bilangan bulat $x \in Z$ dengan $x \equiv 1$ (mod 2), $x \equiv 2$ (mod 3) dan $x \equiv 3$ (mod 5). Ideal yang terlibat $I_1 = 2Z$, $I_2 = 3Z$ dan $I_3 = 5Z$. Mengikuti bukti teorema sisa china diperoleh bilangan-bilangan $a_i, b_i \in Z$ sedemikian sehingga

$1 = a_1 + b_1$ dengan $a_1 \in I_1 = 2Z$ dan $b_1 \in I_2 \cap I_3 = 15Z$,
$2 = a_2 + b_2$ dengan $a_2 \in I_2 = 3Z$ dan $b_2 \in I_1 \cap I_3 = 10Z$ dan
$3 = a_3 + b_3$ dengan $a_3 \in I_3 = 5Z$ dan $b_3 \in I_1 \cap I_2 = 6Z$.

Ambil $(a_1, b_1) = (16, -15)$
$(a_2, b_2) = (-18, 20)$
$(a_3, b_3) = (-15, 18)$

Maka $x := b_1 + b_2 + b_3 = 23$ adalah solusi,
dan semua solusi yang lain adalah $23 + 30k$ dengan $k \in Z$.

3. Kesimpulan

Dari pemaparan di atas dapat ditarik beberapa kesimpulan:

1. Lapangan pecahan dari suatu gelanggang evaluasi sama dengan lapangannya sendiri.
2. Gelanggang evaluasi akan selalu juga merupakan gelanggang lokal.
3. Ideal-ideal dari suatu gelanggang evaluasi dapat diurutkan dengan menggunakan urutan himpunan bagian. Begitu juga sebaliknya, jika ideal-ideal dari suatu gelanggang dapat diurutkan, maka gelanggang tesebut adalah gelanggang evalusi.
4. Jika suatu gelanggang sekaligus merupakan gelanggang evaluasi dan Noetherian, maka gelanggang tersebut merupakan daerah ideal utama.

Daftar Pustaka

1. Lang, S., *Algebra*, Addison-Wesley. 1965.

2. Passman, D. S., *A Course in Ring Theory*, Wadsworth., Inc Belmont, California, 1991.

3. Spindler, K., *Abstract Algebra with Applications*, Volume II, Marcel Dekker, Inc., 1994.