

# Parameterisasi Pengontrol Yang Menstabilkan Plant Secara Internal

Kasbawati \*

## Abstract

This handing out lifts the problem about parameterization of all controllers that can internally stabilize the given system. Controller parameterization is done as a mean to show that the controller can we shape in so many kinds of parameter. A control problem in this setup is to analyze some specific properties (e.g., stability or performance) of the closed loop system or to design the feedback control  $K$  such that the closed loop system is stable in some appropriate sense.

**Keywords:** *detectable, pengontrol suboptimal  $H_\infty$ , stabilizable.*

## 1. Pendahuluan

Ketegaran (kerobustan) suatu sistem terhadap gangguan (*disturbance*) dan ketidakpastian (*uncertainty*) selalu menjadi topik pembahasan utama dalam masalah *feedback control*, khususnya dalam komunitas kontrol (*control community*) [Zhou, 1998]. Masalah *feedback* tidak akan menarik tanpa adanya faktor gangguan dan ketidakpastian didalamnya. Agar suatu sistem dapat robust terhadap gangguan kita dapat mendesain suatu pengontrol yang dapat membuat sistem tersebut tahan terhadap gangguan sesuai dengan keinginan.

Desain pengontrol dengan  $H_\infty$  kontrol atau  $H_2$  kontrol menjamin kerobustan suatu sistem. Desain pengontrol dengan  $H_\infty$  kontrol, pada umumnya menghasilkan suatu pengontrol yang berorde tinggi. Di sisi lain pengontrol yang berorde tinggi dapat menyebabkan beberapa masalah diantaranya kesulitan penghitungan numerik dan biaya perhitungan yang cukup mahal [Zhou, 1998].

Masalah tersebut dapat diatasi dengan melakukan parameterisasi terhadap semua pengontrol yang dapat menstabilkan plant secara internal. Parameterisasi dari himpunan semua pengontrol yang diperkenankan untuk suatu plant pertama kali dikemukakan oleh Youla pada tahun 1976, dengan menggunakan teknik faktorisasi koprim (*coprime factorization*). Kemudian dengan teknik ruang keadaan (*state-space techniques*) diperoleh parameterisasi  $Q$  dari semua pengontrol suboptimal [Zhou, 1998]. Dalam makalah ini, akan dibahas bagaimana menentukan semua pengontrol yang dapat menstabilkan sistem secara internal dan memparameterisasi semua pengontrol yang diperkenankan tersebut.

---

\* Mahasiswa Pascasarjana Matematika pada Institut Teknologi Bandung

## 2. Eksistensi Pengontrol

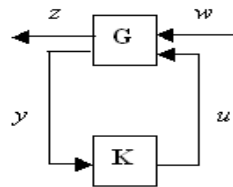
Misalkan kita mempunyai plant umum berupa fungsi transfer  $G(s)$  yang memetakan input  $w$  dan kontrol input  $u$  ke kontrol output  $z$  dan output terukur  $y$ , dengan bentuk

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

dimana  $G(s)$  mempunyai bentuk realisasi sebagai berikut:

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]$$

Dalam bentuk *close-loop system*, fungsi transfer  $G(s)$  yang diberi pengontrol dapat digambarkan dalam bentuk diagram sebagai berikut :



Gambar 1. Diagram Sistem Umum Terhubung  
(General System Interconnected)

$G$  merupakan plant yang diperumum,  $K$  adalah pengontrol yang akan didesain,  $w$  merupakan semua input external yang meliputi *disturbances, commands*,  $u$  merupakan input kontrol,  $y$  merupakan sensor output/output terukur dan  $z$  berupa *regulated output*, untuk suatu  $u \in R^m$ ,  $w \in R^1$ ,  $z \in R^p$ ,  $y \in R^q$ ,  $x \in R^n$ ,

,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B_1 \in R^{n \times 1}$ ,  $B_2 \in R^{n \times m}$ ,  $C_1 \in R^{p \times n}$ ,  $C_2 \in R^{q \times n}$ ,  $D_{12} \in R^{p \times m}$ ,  $D_{21} \in R^{q \times 1}$ .

Jika plant  $G$  tertutup oleh *output feedback*  $u = K(s)y$ , seperti pada Gambar 1, maka lup tertutup dari input  $w$  ke  $z$  dapat dinyatakan dalam bentuk *lower linear fractional transformation* (LFT) yaitu  $T_{zw} = F_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$ .

Tinjau sistem umpan balik dalam gambar 1 dengan plant  $G$  yang diasumsikan *stabilizable* dan *detectable* dengan bentuk realisasi di atas.

*Definisi 1.*

Sistem  $G$  dikatakan *stabilizable* jika terdapat pengontrol  $K$  yang menstabilkan  $G$  secara internal.

*Lemma 1.*

Terdapat pengontrol  $K$  (yang proper) yang dapat menstabilkan  $G$  secara internal jika dan hanya jika  $(A, B_2)$  *stabilizable* dan  $(A, C_2)$  *detectable*.

Jika terdapat  $F$  dan  $L$  sedemikian sehingga  $A + B_2F$  dan  $A + LC_2$  stabil maka pengontrol  $K$  dapat dibentuk menjadi

$$K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{A + B_2F + LC_2 + LD_{22}F}{F} & -L \\ \hline & 0 \end{array} \right]$$

*Bukti.*

( $\Leftarrow$ )

- Dari asumsi bahwa sistem *stabilizable* dan *detectable* maka terdapat K dan L sedemikian sehingga  $A+B_2F$  dan  $A+LC_2$  stabil.
- Misalkan K(s) merupakan pengontrol yang dapat menstabilkan G secara internal, maka matriks A dari sistem loop tertutup di atas berbentuk

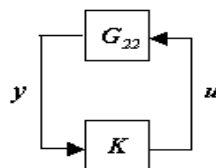
$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B_2F \\ -LC_2 & A+B_2F+LC_2 \end{bmatrix}$$

- Matriks di atas mempunyai bentuk yang sama dengan  $\begin{bmatrix} A+LC_2 & 0 \\ -LC_2 & A+B_2F \end{bmatrix}$ .
- Akibatnya spektrum dari matriks  $\tilde{A}$  akan sama dengan gabungan dari spektrum  $A+B_2F$  dan  $A+LC_2$ .
- Ini mengakibatkan  $\tilde{A}$  juga stabil karena  $A+B_2F$  dan  $A+LC_2$  stabil.

( $\Rightarrow$ )

- Andaikan  $(A,B_2)$  tidak *stabilizable* dan  $(A,C_2)$  tidak *detectable*.
- Akibatnya terdapat nilai eigen dari  $\tilde{A}$  yang real partnya positif sedemikian sehingga sistem tidak stabil.
- Hal ini kontradiksi dengan adanya pengontrol K yang dapat menstabilkan sistem secara internal (defenisi 1)

Asumsi bahwa  $(A,B_2)$  *stabilizable* dan  $(A,C_2)$  *detectable* mengakibatkan realisasi  $G_{22}$  juga *stabilizable* dan *detectable*. Hal ini mengakibatkan bahwa sistem lup tertutup dalam Gambar 1 ekuivalen dengan lup tertutup yang diwakili oleh  $G_{22}$  seperti dalam diagram berikut:



Gambar 2. Diagram *equivalent stabilization*

*Lemma 2.*

Misalkan realisasi  $G_{22} = \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & D_{22} \end{bmatrix}$  yang merupakan partisi dari G, *stabilizable* dan

*detectable*, maka sistem dalam Gambar 1 akan stabil secara internal jika dan hanya jika sistem dalam gambar 2 stabil secara internal.

*Bukti.*

Karena sistem dalam Gambar 1 mempunyai matriks A yang sama dengan sistem dalam Gambar 2 dan  $(A,B_2)$ ,  $(A,C_2)$  *stabilizable* dan *detectable* sehingga jelas bahwa sistem dalam Gambar 1 akan stabil secara internal jika dan hanya jika sistem dalam Gambar 2 juga stabil secara internal.

### 3. Parameterisasi Pengontrol (Youla Parameterization)

Tinjau kembali sistem lup tertutup dalam gambar 1 dengan bentuk realisasi yang sama. Salah satu bentuk parameterisasi dari pengontrol yang dapat menstabilkan plant G secara internal dapat dilihat dalam teorema berikut.

*Teorema 1.*

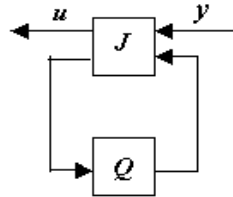
Misalkan  $G \in RH_\infty$ , maka semua pengontrol yang menstabilkan G dapat ditulis dalam bentuk  $K = Q(I + G_{22}Q)^{-1}$  untuk suatu  $Q \in RH_\infty$  dan  $(I + D_{22}Q(\infty))$  nonsingular.

*Bukti.*

- Karena  $G_{22}$  stabilizable (dari asumsi awal), maka terdapat pengontrol yang menstabilkan  $G_{22}$  secara internal.
- Misalkan pengontrol tersebut adalah  $K_0$ , maka  $Q_0 := K_0(I - G_{22}K_0)^{-1} \in RH_\infty$ .
- Karena  $(I + D_{22}Q_0(\infty)) = (I - D_{22}K_0(\infty))^{-1}$ , akibatnya  $K_0$  dapat ditulis dalam bentuk  $K_0 = Q_0(I + G_{22}Q_0)^{-1}$ .

*Teorema 2.*

Misalkan terdapat F dan L sedemikian sehingga  $A + B_2F$  dan  $A + LC_2$  stabil maka semua pengontrol yang menstabilkan G secara internal dapat diparameterisasi menjadi matriks transfer  $T_{uy}$  dari y ke u (lihat diagram berikut),



Gambar 3: Sistem umum terhubung

dengan bentuk  $K = F_l(J, Q) = J_{11} + J_{12}Q(I - J_{22}Q)^{-1}J_{21}$  untuk suatu J yang berbentuk

$$J = \left[ \begin{array}{cc|cc} A + B_2F + LC_2 + LD_{22}F & -L & B_2 + LD_{22} & \\ \hline F & 0 & I & \\ \hline -(C_2 + D_{22}F) & I & -D_{22} & \end{array} \right]$$

Hal ini mengakibatkan, himpunan dari semua matriks transfer  $T_{zw}$  dari lup tertutup yang membawa w ke z (Gambar 1) dapat dibentuk menjadi

$$F_l(J, Q) = \{T_{11} + T_{12}QT_{21} : Q \in RH_\infty, I + D_{22}Q(\infty) \text{ invertible}\}$$

untuk suatu T yang berbentuk

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} A + B_2F & -B_2F & B_1 & B_2 \\ \hline 0 & A + LC_2 & B_1 + LD_{21} & 0 \\ \hline C_1 + D_{12}F & -D_{12}F & D_{11} & D_{12} \\ \hline 0 & C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

*Bukti.*

- Misalkan  $K = F_l(J, Q)$ . Dengan menggunakan state space star product diperoleh  $F_l(G, K) = T_{11} + T_{12}QT_{21}$  untuk suatu T yang telah didefinisikan di atas.

- Pengontrol  $K = F_l(J, Q)$  tidak menstabilkan sistem G untuk suatu  $Q \in RH_\infty$ .
- Misalkan K sebarang pengontrol yang menstabilkan G secara internal, maka  $F_l(\hat{J}, K) \in RH_\infty$  dengan

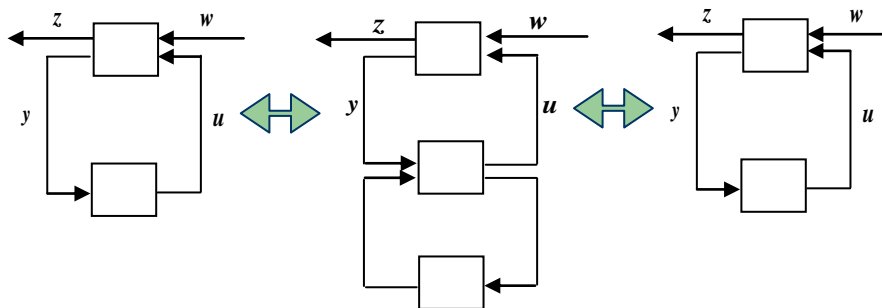
$$\hat{J} = \left[ \begin{array}{c|cc} A & -L & B_2 \\ \hline -F & 0 & I \\ C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

- Matriks  $\hat{J}$  dapat distabilkan oleh K karena  $\hat{J}$  mempunyai bentuk  $G_{22}$  yang sama dengan G.
- Misalkan  $Q_0 := F_l(\hat{J}, K) \in RH_\infty$  maka  $F_l(J, Q_0) = F_l(J, F_l(\hat{J}, K)) =: F_l(J_{tmp}, K)$  dimana  $J_{tmp}$  dapat diperoleh dengan menggunakan state space star product, yaitu

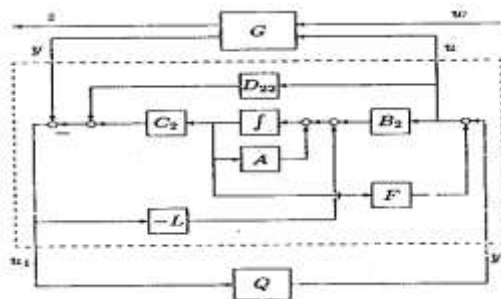
$$J_{tmp} = \left[ \begin{array}{cc|cc} A+LC_2+B_2F & -B_2F & -L & B_2 \\ LC_2 & A & -L & B_2 \\ \hline F & -F & 0 & I \\ -C_2 & C_2 & I & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} A+LC_2 & -B_2F & -L & B_2 \\ 0 & A+B_2F & 0 & 0 \\ \hline 0 & -F & 0 & I \\ 0 & C_2 & I & 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & I \end{array} \right]$$

- Akibatnya diperoleh  $F_l(J, Q_0) = F_l(J_{tmp}, K) = K$ .
- Jadi sebarang pengontrol dapat dibentuk menjadi  $F_l(J, Q_0)$  untuk suatu  $Q_0 \in RH_\infty$ .

Secara umum teorema 2 di atas dapat digambarkan dalam diagram berikut:



Gambar 4 : Perubahan bentuk sistem lup tertutup G dan K menjadi sistem lup tertutup T dan Q akibat parameterisasi  $K = F_l(J, Q)$



Gambar 5 : Bentuk parameterisasi pengontrol  $K = F_l(J, Q)$

Selanjutnya kita akan melihat parameterisasi pengontrol dengan menggunakan pendekatan *coprime factorization*.

*Teorema 3.*

**Kasbawati**

Misalkan  $G_{22} = NM^{-1} = \hat{M}^{-1}\hat{N}$  merupakan rcf dan lcf of  $G_{22}$  dalam  $RH_\infty$ , maka himpunan dari semua pengontrol yang menstabilkan  $G$  secara internal dapat diparameterisasi menjadi

$$K = (U_0 + MQ_r)(V_0 + NQ_r)^{-1}, \det(I + V_0^{-1}NQ_r)(\infty) \neq 0 \quad (1)$$

untuk suatu  $Q_r \in RH_\infty$ . Atau dalam bentuk

$$K = (\tilde{V}_0 + Q_l \tilde{N})(\tilde{U}_0 + Q_l \tilde{M})^{-1}, \det(I + Q_l \tilde{N} \tilde{V}_0^{-1})(\infty) \neq 0 \quad (2)$$

untuk suatu  $Q_l \in RH_\infty$ , dengan  $U_0, V_0, \tilde{U}_0, \tilde{V}_0 \in RH_\infty$  memenuhi Bezout identities:

$$\tilde{V}_0 M - \tilde{U}_0 N = I, \quad \tilde{M} V_0 - \tilde{N} U_0 = I$$

Jika  $U_0, V_0, \tilde{U}_0$  dan  $\tilde{V}_0$  dipilih sedemikian sehingga  $U_0 V_0^{-1} = \tilde{V}_0^{-1} \tilde{U}_0$ , yaitu

$$\begin{bmatrix} \tilde{V}_0 & -\tilde{U}_0 \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U_0 \\ N & V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} K &= (U_0 + MQ_y)(V_0 + NQ_y)^{-1} \\ &= (\tilde{V}_0 + Q_y \tilde{N})(\tilde{U}_0 + Q_y \tilde{M})^{-1} \\ &= F_i(J_y, Q_y) \end{aligned} \quad (3)$$

dimana

$$J_y := \begin{bmatrix} U_0 V_0^{-1} & \tilde{V}_0^{-1} \\ V_0^{-1} & -V_0^{-1} N \end{bmatrix}$$

dan  $Q_y \in RH_\infty$ ,  $(I + V_0^{-1} N Q_y)(\infty)$  invertible.

**Bukti.**

Pertama, akan dibuktikan parameterisasi dalam persamaan (1).

- Andaikan  $K$  terdefenisi.
- Defenisikan  $U := U_0 + MQ_r$ ,  $V := V_0 + NQ_r$ .
- Akibatnya  $\tilde{M}V - \tilde{N}U = \tilde{M}(V_0 + NQ_r) - \tilde{N}(U_0 + MQ_r) = \tilde{M}V_0 - \tilde{N}U_0 + (\tilde{M}N - \tilde{N}M)Q_r = I$ .
- Dengan menggunakan lemma 5.7 (dari sub bab 5.4) dapat disimpulkan bahwa  $K$  dapat menstabilkan  $G$  secara internal.
- Sebaliknya, misalkan  $K$  proper dan dapat menstabilkan dengan rcf dari  $K$  dalam  $RH_\infty$  adalah  $K = UV^{-1}$ .
- Berdasarkan lemma 5.7,  $Z := \tilde{M}V - \tilde{N}U$  invertible.
- Defenisikan  $Q_r$  melalui persamaan

$$U_0 + MQ_r = UZ^{-1} \quad (4)$$

- Akibatnya

$$Q_r = M^{-1}(UZ^{-1} - U_0)$$

- Dengan menggunakan *Bezout identity*, diperoleh
 
$$\begin{aligned}
 V_0 + NQ_r &= V_0 + NM^{-1}(UZ^{-1} - U_0) \\
 &= V_0 + \tilde{M}^{-1}\tilde{N}(UZ^{-1} - U_0) \\
 &= \tilde{M}^{-1}(\tilde{M}V_0 - \tilde{N}U_0 + \tilde{N}UZ^{-1}) \\
 &= \tilde{M}^{-1}(I + \tilde{N}UZ^{-1}) \\
 &= \tilde{M}^{-1}(Z + \tilde{N}U)Z^{-1} \\
 &= \tilde{M}^{-1}\tilde{M}VZ^{-1} \\
 &= VZ^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$
- Akibatnya  $K = UV^{-1} = (U_0 + MQ_r)(V_0 + NQ_r)^{-1}$ .
- Untuk mengetahui apakah  $Q_r$  didalam  $RH_\infty$ , tinjau persamaan (4) dan (5). Dari kedua persamaan tersebut dapat dilihat bahwa  $MQ_r$  dan  $NQ_r$  di dalam  $RH_\infty$ .
- Akibatnya  $Q_r$  dapat ditulis menjadi  $Q_r = (\tilde{v}_0M - \tilde{u}_0N)Q_r = \tilde{v}_0(MQ_r) - \tilde{u}_0(NQ_r) \in RH_\infty$ .
- Karena V dan Z keduanya invertible maka  $V_0 + NQ_r$  dan  $I + V_0^{-1}NQ_r$  juga invertible.

Parameterisasi pengontrol dalam persamaan (2) langkah pembuktiannya sama dengan pembuktian yang pertama. Selanjutnya akan dibuktikan parameterisasi dalam persamaan (3).

- Tinjau persamaan berikut:

$$(U_0 + MQ_y)(V_0 + NQ_y)^{-1} = U_0V_0^{-1} + (M - U_0V_0^{-1}N)Q_y(I + V_0^{-1}NQ_y)^{-1}V_0^{-1}$$

dan

$$U_0V_0^{-1} = \tilde{v}_0^{-1}\tilde{u}_0$$

- Dari kedua persamaan di atas diperoleh

$$(M - U_0V_0^{-1}N) = (M - \tilde{v}_0^{-1}\tilde{u}_0N) = \tilde{v}_0^{-1}(\tilde{v}_0M - \tilde{u}_0N) = \tilde{v}_0^{-1}$$

dan

$$K = U_0V_0^{-1} + \tilde{v}_0^{-1}Q_y(I + V_0^{-1}NQ_y)^{-1}V_0^{-1}$$

#### 4. Penerapan Parameterisasi Pengontrol

Misalkan diberikan sistem dengan bentuk realisasi sebagai berikut :

$$G = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -10 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dari matriks A dalam realisasi di atas dapat dilihat bahwa sistem yang diberikan tidak stabil. Masalah kontrol yang akan kita lakukan adalah mencari pengontrol yang dapat menstabilkan G secara internal dan kemudian memparameterisasi pengontrol tersebut. Dengan menggunakan bahasa pemrograman Matlab 7 diperoleh hasil *running* sebagai berikut:

- Pengontrol sub optimal  $K_1$  dalam bentuk fungsi transfer sebagai berikut:

$$\frac{4.146e005 s + 4.146e005}{s^2 + 1.451e006 s - 1.036e006}$$

- Fungsi transfer  $T_{zw1}$  yang membawa input  $w$  ke output  $z$  yang diharapkan, yaitu

$$\frac{4.146e005 s^3 + 2.762e-010 s^2 - 1.244e006 s - 8.291e005}{s^4 + 1.451e006 s^3 + 5.804e006 s^2 + 7.255e006 s + 2.902e006}$$

Norm infinity dari  $T_{zw1}$ , yaitu

$$\|T_{zw1}\|_{\infty} = 0.2857 < \gamma ; \gamma = 1$$

Selanjutnya pengontrol lain dapat kita parameterisasi, salah satunya dengan menggunakan *coprime factorization*. Dengan mendefinisikan  $M = I$  diperoleh matriks

$$N = \begin{bmatrix} -0.9728 & 0 \\ 0 & -0.9456 \end{bmatrix}$$

yang memenuhi syarat coprime  $XM + YN = I$ . Dengan menggunakan bahasa pemrograman Matlab 7, diperoleh hasil *running* sebagai berikut:

- Pengontrol kedua (melalui *coprime factorization*) yaitu  $K_2$  dalam bentuk fungsi transfer sebagai berikut:

$$\frac{1.197 s + 1.242}{s^2 + 7.226 s - 1.109}$$

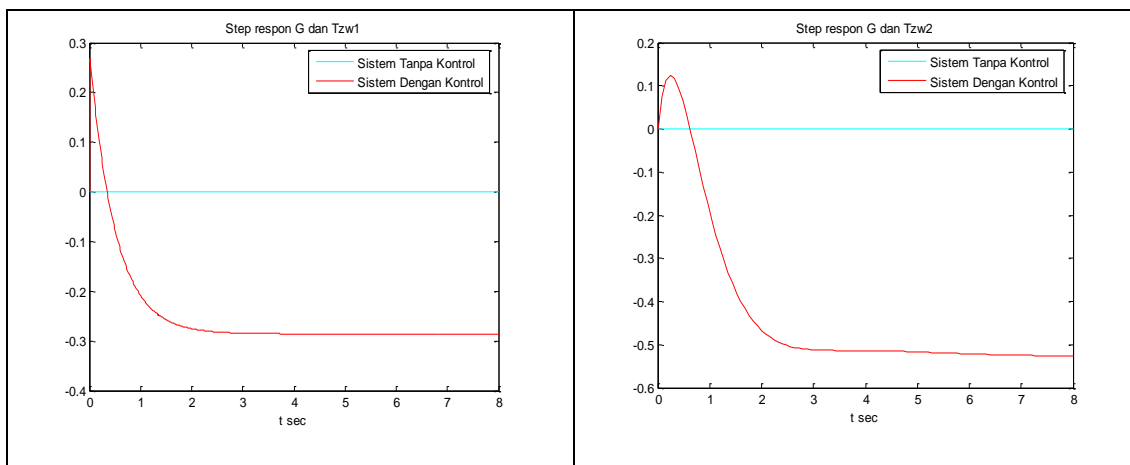
- Fungsi transfer  $T_{zw2}$  yang membawa input  $w$  ke output  $z$  yang diharapkan, yaitu

$$\frac{1.197 s^3 + 0.04508 s^2 - 3.637 s - 2.485}{s^4 + 6.226 s^3 + 13.61 s^2 + 13.9 s + 4.704}$$

Norm infinity dari  $T_{zw2}$ , yaitu

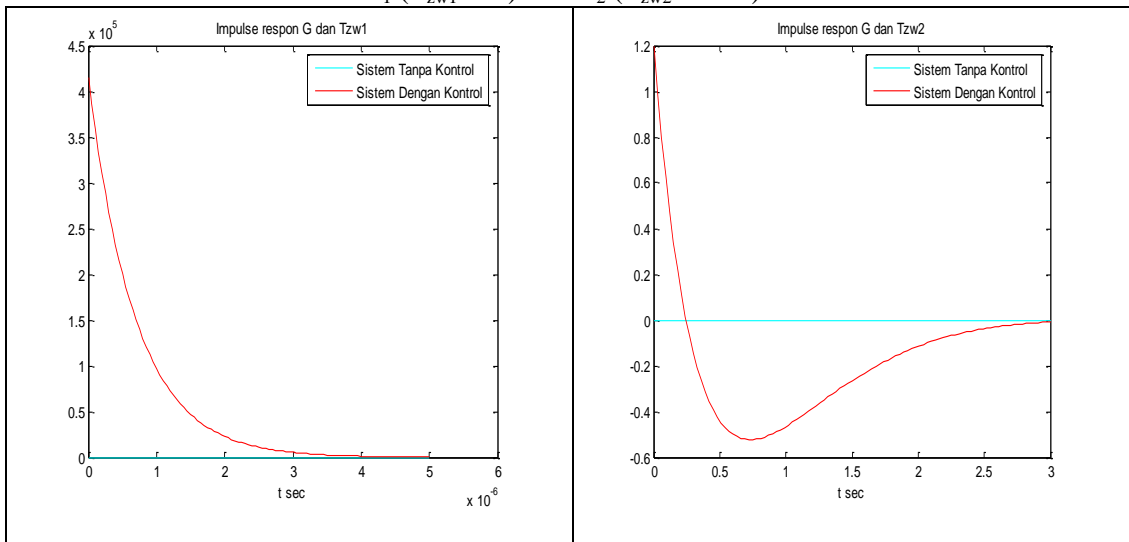
$$\|T_{zw2}\|_{\infty} = 0.5283 < \gamma ; \gamma = 1$$

Perbandingan antara hasil kontrol sistem oleh pengontrol  $K_1$  dan pengontrol  $K_2$  dapat dilihat dalam plot step respon, impulse respon dan plot frekuensi respon atau bode plot dalam gambar berikut:

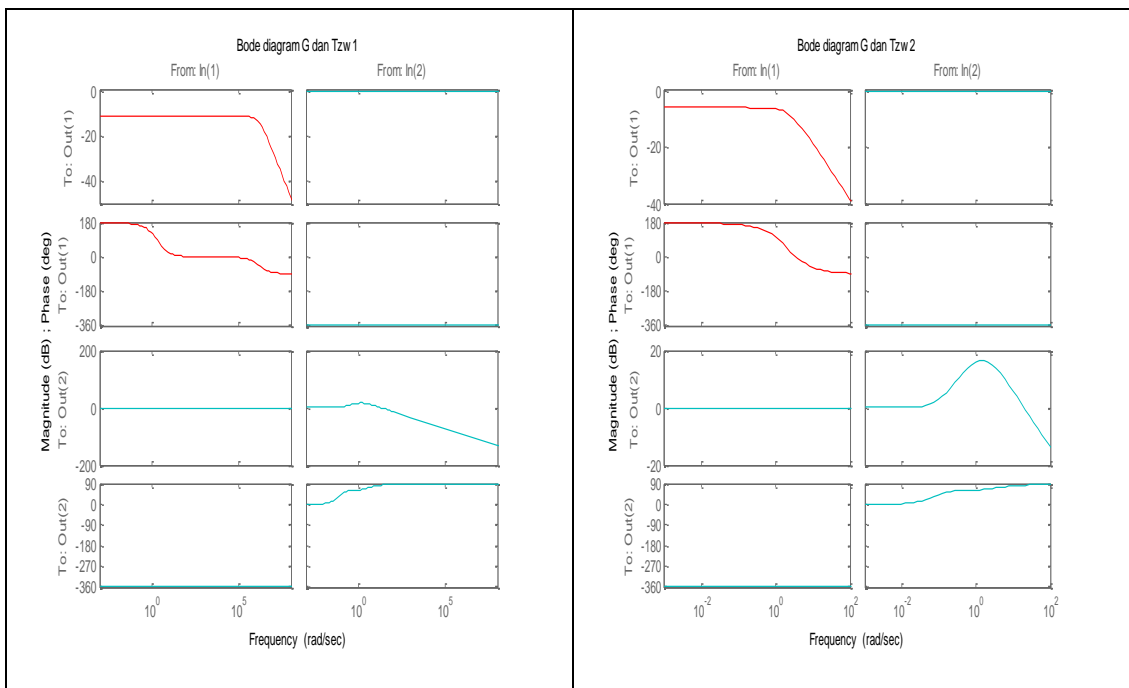




Gambar 6 : Plot step respon antara sistem yang belum dikontrol (G) dan sistem yang telah dikontrol oleh  $K_1$  ( $T_{zw1}$ -kiri) dan  $K_2$  ( $T_{zw2}$ -kanan)



Gambar 7 : Plot impulse respon antara sistem yang belum dikontrol (G) dan sistem yang telah dikontrol oleh  $K_1$  ( $T_{zw1}$ -kiri) dan  $K_2$  ( $T_{zw2}$ -kanan).



Gambar 8 : Bode plot antara sistem yang belum dikontrol (G) dan sistem yang telah dikontrol oleh  $K_1$  ( $T_{zw1}$ -kiri) dan  $K_2$  ( $T_{zw2}$ -kanan)

Dari plot solusi di atas kita dapat membandingkan antara sistem yang dikontrol oleh  $K_1$  dan sistem yang dikontrol oleh  $K_2$ . Jika sistem diberikan input berupa fungsi step maka sistem yang dikontrol oleh  $K_1$  (gambar 6-kiri) akan lebih cepat mencapai kondisi yang stabil jika dibandingkan sistem yang dikontrol oleh  $K_2$  (gambar 6-kanan). Begitupula jika sistem diberikan input berupa fungsi impuls (respon yang tiba-tiba) maka sistem yang dikontrol oleh  $K_1$  (gambar 7-kiri) juga akan lebih cepat mencapai kondisi yang stabil jika dibandingkan sistem

yang dikontrol oleh  $K_2$  (gambar 7-kanan). Perbandingan hasil sistem yang telah dikontrol oleh  $K_1$  dan  $K_2$  juga dapat dilihat dari norm tak hingga dari tiap fungsi transfer pengontrol dimana  $\|T_{zw1}\|_\infty < \|T_{zw2}\|_\infty < \gamma$ . Hal ini disebabkan karena pengontrol  $K_1$  mengalami optimalisasi sehingga sistem yang dikontrol oleh  $K_1$  hasilnya akan jauh lebih baik dari  $K_2$  yang tidak melalui optimalisasi.

## 5. Kesimpulan

Desain kontrol dengan  $H_\infty$  kontrol menghasilkan suatu pengontrol yang akan menjamin kerobustan sistem. Disamping itu kontrol yang dihasilkan dengan  $H_\infty$  kontrol mengalami optimalisasi sehingga norm dari fungsi transfernya dapat diminimumkan. Pada contoh yang diberikan, pengontrol yang menstabilkan sistem dapat dinyatakan dalam berbagai macam bentuk. Salah satu bentuk parameterisasi tersebut adalah dengan *coprime factorization*. Tetapi sistem yang dikontrol dengan  $H_\infty$  kontrol hasilnya jauh lebih baik jika dibandingkan dengan kontrol lain yaitu kontrol yang dihasilkan dengan *coprime factorization*.

Pengontrol lain dapat diparameterisasi dengan tujuan untuk memperlihatkan bahwa pengontrol dapat dibentuk dari berbagai macam parameter dan dapat digunakan untuk mengurangi orde pengontrol walaupun dalam aplikasi di lapangan, parameterisasi pengontrol jarang dilakukan karena kontrol yang dihasilkan oleh  $H_\infty$  kontrol sudah menjamin kerobustan sistem sesuai yang diinginkan.

## Daftar Pustaka

- [1] A.R.Hakim., 2002, “*Parameterisasi Pengontrol Suboptimal  $H_\infty$* ”, Tesis.
- [2] F.L. Lewis and V.L. Syrmos, 1995, “*Optimal Control*”, *Second Edition*. New York: Wiley.
- [3] K. Ogata, 1997, “*Modern Control Engineering*”, *Third Edition*. London: Prentice Hall.