JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index

Vol. 20, No. 1, September 2023, pp. 65- 74
DOI: 10.20956/j.v20i1.26808

The Partition Dimension of The Edge Amalgamation in Cycle Graph

Dimensi Partisi Hasil Amalgamasi-Sisi pada Graf Siklus

Ananda Dwi Nabila[1*], Hasmawati[2*], Muh. Nur[3*]

[*]*Program Studi Matematika, FMIPA-Universitas Hasanuddin*

Email: *anandadwinabilaa@gmail.com[1], hasmaba97@gmail.com[2], muhammadnur@unhas.ac.id[3]*

Abstract

The graph G is a pair of sets $(V(G), E(G))$ where $V(G)$ is a finite set whose elements are called vertices, and $E(G)$ is the set of pairs of members of $V(G)$. which is called the edge. Let G be a simple graph where $u, v \in V(G)$. The distance between points u and v is denoted by $d(u, v)$ is the length of the shortest path between u and v. Given $S \subseteq V(G)$ and there is a vertex v on the connected graph G, then the distance between v and S is denoted $d(v, S)$. If $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ is k-partition of $V(G)$, then the representation of v with respect to is k-ordered pairs, $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. If the k-ordered pairs $r(v|\prod)$ for $v \in V(G)$ are all different, then the partition is called a dimension partition. The minimal k-number which is the k-differentiating partition of $V(G)$ is called the partition dimension of G and is denoted by $pd(G)$. In this study, the partition dimensions of the sided amalgamation result will be determined on an even-order cycle graph. In determining the dimensions of the partition, characterization of the partition dimensions is used in the path graph, the lemma about the distinguishing set and the equivalence point, especially in the even-order cycle graph. The results of this study are $pd(Amal(C_4, e, k)) = 4$ for $k = 4,5,6$, $pd(Amal(C_4, e, k)) = 3 + m$ for $k = 2m + 5$ and $k = 2m + 6$ where $m = 1,2,3, \dots$

Keywords: Graph theory, edge amalgamation, partition dimension, even order cycle graph, discrimination partition, equivalent point.

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ananda Dwi Nabila, Hasmawati, Muh. Nur

Abstrak

Graf G adalah pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$ dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang anggota-anggotanya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi *(edge)*. Misalkan G adalah graf sederhana dengan $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan v merupakan lintasan terpendek antara titik u dan v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Diberikan $S \subseteq V(G)$ sehingga jarak antara titik v dan S dinotasikan dengan $d(v, S)$. Jika $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah k-partisi dari $V(G)$, maka representasi titik v terhadap $\prod$ adalah $r(v|\prod) = \left(d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)\right)$. Jika k-pasangan berurutan $r(v|\prod)$ untuk $v \in V(G)$ semuanya berbeda, maka partisi $\prod$ disebut sebagai partisi pembeda. Bilangan $k-$minimal yang merupakan $k-$partisi pembeda dari $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan dengan $pd(G)$. Pada penelitian ini akan ditentukan dimensi partisi dari graf hasil amalgamasisi-sisi pada graf siklus orde genap. Dalam penentuan dimensi partisi tersebut digunakan karakterisasi dimensi partisi pada graf path, lemma tentang himpunan pembeda dan titik setara khususnya pada graf siklus orde genap. Hasil dari penelitian ini adalah $pd\left(Amal(C_4, e, k)\right) = 4$ untuk $k = 4,5,6$, $pd\left(Amal(C_4, e, k)\right) = 3 + m$ untuk $k = 2m + 5$ dan $k = 2m + 6$ dengan $m = 1,2,3, \dots$

Kata Kunci: Teori graf, amalgamasi sisi, dimensi partisi, graf siklus orde genap, partisi pembeda, titik setara.

1. PENDAHULUAN

Graf G adalah pasangan himpunan $\left(V(G), E(G)\right)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang anggota-anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi. Salah satu konsep teori graf yang menarik adalah dimensi partisi.

Konsep partisi dan representasi digunakan oleh seorang kimiawan pada tahun 1993. [6] Konsepnya yaitu senyawa kimia direpresentasikan dalam bentuk graf dimana atom menyatakan titik-titik dari graf dan ikatan valensi antara dua atom menyatakan sisi dari graf tersebut lalu menentukan klasifikasi senyawa kimia berdasarkan konsep partisi. Selanjutnya, pada tahun 2000 dimensi partisi dari sebuah graf G pertama kali dikenalkan oleh Chartrand, Salehi dan Zhang. [1] Mereka mengelompokkan semua titik di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut. Selanjutnya, mereka membuktikan dimensi partisi dari graf G yang dinotasikan dengan $pd(G)$ bahwa $pd(G) = n$ jika dan hanya jika G merupakan graf lengkap dan $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G merupakan graf lintasan.

Selain itu, terdapat beberapa hasil tentang dimensi partisi pada suatu graf yang telah diperoleh diantaranya yaitu pada skripsi RA. Novita Indriyani [5] yang berjudul “Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Amalgamasi-Sisi Siklus Gasal”. Pada penelitian tersebut objek penelitiannya adalah amalgamasi-sisi siklus. Pada tahun 2018, terdapat penelitian yang dilakukan oleh Gilang Arya Riza [6] mengenai dimensi partisi dari graf persahabatan.

Selanjutnya, pada 2019 juga terdapat penelitian yang dilakukan oleh Faisal, dkk., mengenai dimensi partisi graf hasil operasi comb graf lingkaran dan graf lintasan [2], dan pada tahun 2022 Hasmawati dkk meneliti mengenai dimensi partisi graf hasil amalgamasi siklus dimana objek penelitiannya adalah amalgamasi-titik pada graf siklus [4]. Sehingga, Pada jurnal ini akan dibahas penentuan dimensi partisi hasil amalgamasi sisi pada graf siklus $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$. Hasil dalam penelitian ini, ditulis dalam bentuk Lemma dan Teorema.

2. TINJAUAN PUSTAKA

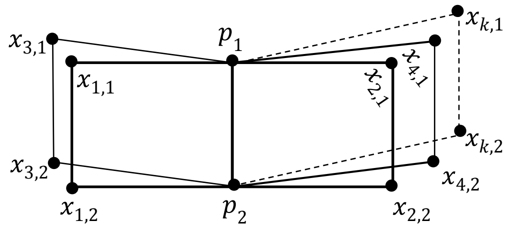
Graf G adalah pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang anggota-anggotanya disebut titik *(vertex)*, dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan anggota-anggota $V(G)$ yang disebut sisi *(edge)*.

Misalkan G adalah suatu graf. Titik $v_i, v_j \in V(G)$ dan sisi $x \in E(G)$. Jika $x = v_i v_j$ maka dikatakan bahwa titik v_i bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_j dan sisi x terkait (*incident*) dengan titik v_i begitu pula untuk titik v_j.[3]

Definisi 2.1. Misalkan G adalah graf sederhana dimana $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah

$$d(u,v) = \begin{cases} k, \; k \; adalah \; panjang \; lintasan \; terpendek \; antara \; u \; dan \; v \\ 0, \; u = v \\ \infty, \; jika \; tidak \; ada \; lintasan \; antara \; u \; dan \; v \end{cases}$$

Misalkan $\{G_i \big| i \in \{1,2,3, \dots, m\}\}$ untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 4$ merupakan kumpulan graf berhingga dan masing-masing G_i memiliki sisi tetap $e = p_1 p_2$ yang disebut sisi pusat. Amalgamasi $Amal(C_4, e, k)$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil semua C_4 dan menyatukan sisi pusatnya. Berikut merupakan gambaran dari graf $Amal(C_4, e, k)$ yang akan diteliti.



Gambar 2.1. $Amal(C_4, e, k)$

Himpunan titik $V\big(Amal(C_4, e, k)\big) = \{p_1, p_2\} \cup \{x_{i,1},\ x_{i,2} \mid 1 \le i \le k\}$ dan himpunan sisi $E\big(Amal(C_4, e, k)\big) = \{p_1p_2, p_1x_{i,1}, p_2x_{i,2}, x_{i,1}x_{i,2|}|1 \le i \le k\}$.

Definisi 2.2. Diberikan $S \subseteq V(G)$ dan terdapat titik v pada graf terhubung G, maka jarak antara v dan S dinotasikan $d(v,S)$, didefinisikan sebagai $d(v,S) = \min\{d(v,x): x \in S\}$. Jika $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah k-partisi dari $V(G)$, maka representasi v terhadap $\prod$ adalah k-pasangan berurutan, $r(v|\prod) = \big(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\big)$. Jika k-pasangan berurutan $r(v|\prod)$ untuk $v \in V(G)$ semuanya berbeda, maka partisi $\prod$ disebut sebagai partisi pembeda. Bilangan k −minimal yang merupakan k −partisi pembeda dari $V(G)$ disebut dimensi partisi dari G dan dinotasikan dengan $pd(G)$. [1]

Teorema 2.1. Diberikan graf sederhana dan terhubung G dengan orde n; maka,

(i) $pd(G) = 2$, jika dan hanya jika G merupakan graf lintasan,
(ii) $pd(G) = n$, jika dan hanya jika G merupakan graf lengkap. [8]

Teorema 2.2. Diberikan graf G yang bukan merupakan graf lintasan atau graf lengkap dengan orde $n \ge 4$ maka $3 \le pd(G) \le n - 1$. [7]

Definisi 2.3. Diberikan graf G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik setara dalam graf G yang dinotasikan $u{\sim}v$ apabila memenuhi salah satu sifat berikut [4] :

1. $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)/\{u,v\}$.
2. Terdapat titik $c \in V(G)$ sedemikian sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s), \forall s \in V(G)/\{\text{u,v}\}$.

Lemma 2.1. Diberikan graf terhubung G dan $u, v, w \in V(G)$. Jika $u{\sim}v$ dan $v{\sim}w$, maka $u{\sim}w$.

Teorema 2.3. Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$. Jika $\prod$ merupakan partisi pembeda graf G dan titik u dan v merupakan titik-titik yang setara dalam G, maka u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di $\prod$.

Definisi 2.4. Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setingkat dalam graf G apabila memenuhi kedua sifat berikut:

1. $\deg(u) = \deg(v)$
2. Jika $d(u,x) = k$, terdapat $y \in V(G)$ sehingga $d(u,x) = d(v,y)$ dan $|\{d(u,x)|x \in V(G)\}| = |\{\ d(v,y)|y \in V(G)\}|$

3. HASIL UTAMA

Hasil utama dalam penelitian ini adalah perumuman dari hasil penentuan dimensi partisi $Amal(C_4, e, k)$ yang akan disajikan dalam bentuk Lemma dan Teorema.

Lemma 3.1. Diberikan graf $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$ memiliki himpunan titik $V\left(Amal\left(C_4^i, e, k\right)\right) = \{p_1, p_2\} \cup \{x_{i,1},\ x_{i,2} \mid 1 \leq i \leq k$ sehingga didapatkan masing-masing titik $x_{i,1}, x_{i,2}$ dengan $1 \leq i \leq k$ merupakan titik-titik yang setara.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.3, diperoleh titik-titik yang setara adalah sebagai berikut:

1. $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}$ adalah titik-titik yang setara karena terdapat titik p_1 sedemikian sehingga $d(x_{1,1}, p_1) + d(p_1, s) = d(x_{2,1}, p_1) + d(p_1, s) = \cdots = d(x_{k,1}, p_1) + d(p_1, s), \forall s \in V\left(Amal(C_4, e, k)\right)/\{x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}\}$.
2. $x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah titik-titik yang setara karena terdapat titik p_2 sedemikian sehingga $d(x_{1,2}, p_2) + d(p_2, s) = d(x_{2,2}, p_2) + d(p_2, s) = \cdots = d(x_{k,2}, p_2) + d(p_2, s),\ \forall s \in V\left(Amal(C_4, e, k)\right)/\{x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,2}\}$.

Akibat 3.1. Diberikan graf $G = Amal(C_4, e, k)$ dengan himpunan titik $V\left(Amal(C_4, e, k)\right) = \{p_1, p_2\} \cup \{x_{i,1},\ x_{i,2} \mid 1 \leq i \leq k\}$ dan himpunan sisi $E\left(Amal(C_4, e, k)\right) = \{p_1p_2, p_1x_{i,1}, p_2x_{i,2}, x_{i,1}x_{i,2} | 1 \leq i \leq k\}$. Jika Π merupakan partisi pembeda untuk G, maka titik $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}$ atau $x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,2}$ harus berada pada kelas partisi yang berbeda.

Lemma 3.2. Diberikan graf $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k \geq 4$ memiliki himpunan titik $V\left(Amal\left(C_4^i, e, k\right)\right) = \{p_1, p_2\} \cup \{x_{i,1},\ x_{i,2} \mid 1 \leq i \leq k\}$, maka :

a. titik $x_{i,1}, x_{i,2}$ dengan $1 \leq i \leq k$ merupakan titik yang setingkat.

b. titik p_1 dan p_2 merupakan titik yang setingkat.

Bukti.

Berdasarkan Definisi 2.4, diperoleh titik-titik yang setingkat adalah sebagai berikut :

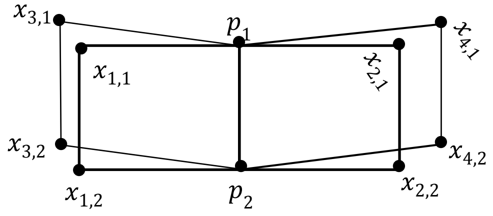
1. $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah titik-titik yang setingkat karena $\deg(x_{1,1}) = \deg(x_{2,1}) = \cdots = \deg(x_{k,1}) = \deg(x_{1,2}) = \cdots = \deg(x_{k,2}) = 2$ dan banyaknya titik yang berjarak satu dengan $x_{1,1},, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah 2, banyaknya titik yang berjarak dua dengan $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah k, banyaknya titik yang berjarak tiga dengan $x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{k,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{k,2}$ adalah k.
2. p_1, p_2 adalah titik-titik yang setingkat karena $deg(p_1) = deg(p_2) = k + 1$ dan banyaknya

titik yang berjarak satu dengan p_1, p_2 adalah $k+1$, banyaknya titik yang berjarak dua dengan p_1, p_2 adalah k.

Proposisi 3.1. $pd\big(Amal(C_4, e, 4)\big) = 4$.

Bukti.

Berikut merupakan gambaran dari graf amalgamasi sisi siklus C_4 sebanyak empat yang dinotasikan dengan $Amal(C_4, e, 4)$.



Gambar 3.1. $Amal(C_4, e, 4)$

Misalkan $\prod = \{S_1,\ S_2, S_3, S_4\}$ dengan
$S_1 = \{p_1, x_{1,1}, x_{2,1}\}$, $S_2 = \{p_2, x_{1,2}, x_{4,2}\}$, $S_3 = \{x_{2,2}, x_{3,1},, x_{4,1}\}$, dan $S_4 = \{x_{3,2}\}$.

Representasi titik-titik pada $Amal(C_4, e, 4)$ terhadap $\prod$ adalah sebagai berikut :

$$r(p_1|\prod) = (0,1,1,2), \quad r(x_{2,2}|\prod) = (1,1,0,2),$$

$$r(p_2|\prod) = (1,0,1,1), \quad r(x_{3,1}|\prod) = (1,2,0,1),$$

$$r(x_{1,1}|\prod) = (0,1,2,3), \quad r(x_{3,2}|\prod) = (2,1,1,0),$$

$$r(x_{1,2}|\prod) = (1,0,2,2), \quad r(x_{4,1}|\prod) = (1,1,0,3),$$

$$r(x_{2,1}|\prod) = (0,2,1,3), \quad r(x_{4,2}|\prod) = (2,0,1,2).$$

Dapat dilihat bahwa setiap titik yang berada pada kelas partisi yang sama memiliki representasi berbeda terhadap $\prod = \{S_1,\ S_2, S_3, S_4\}$ maka $\prod$ adalah partisi pembeda. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi $Amal(C_4, e, 4)$ adalah $pd\big(Amal(C_4, e, 4)\big) \leq 4$.

Selanjutnya akan ditentukan batas bawah dari dimensi partisi $Amal(C_4, e, 4)$, dengan mengambil partisi pembeda $\prod_1$ kardinalitas sama dengan 3 maka diperoleh :

1. Apabila p_1 dan p_2 berada pada kelas partisi yang sama maka $r(p_1|\prod_1) = r(p_2|\prod_1)$ atau $r(p_1|\prod_1) = r(x_{4,2}|\prod_1)$ atau terdapat titik-titik setingkat berada pada kelas partisi yang sama dan memiliki representasi yang sama atau terdapat titik-titik setara

berada pada kelas partisi yang sama dan tetangganya juga berada pada kelas partisi yang sama.

2. Apabila p_1 dan p_2 berada pada kelas partisi yang berbeda maka terdapat titik-titik setingkat berada pada kelas partisi yang sama dan memiliki representasi yang sama atau terdapat titik-titik setara berada pada kelas partisi yang sama dan tetangganya juga berada pada kelas partisi yang sama.

Hal tersebut bertentangan dengan **Akibat 3.1**, sehingga batas bawah dari dimensi partisi $Amal(C_4, e, 4)$ adalah $pd\big(Amal(C_4, e, 4)\big) \geq 4$. Jadi, $pd\big(Amal(C_4, e, 4)\big) = 4$.

Lemma 3.3. Jika $k \geq 4$ maka $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) \geq 4$

Bukti.

Semakin besar nilai k maka semakin banyak titik-titik yang setara dan titik-titik yang setingkat pada $Amal(C_4, e, k)$. Pada $Amal(C_4, e, 4)$ telah diperoleh $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) \neq 3$ sehingga jika $k > 4$ maka $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) \geq 4$.

Teorema 3.1. $pd(Amal(C_4, e, k) = \begin{cases} 4, k = 4,5,6 \\ 3 + m, untuk \quad k = 2m + 5 \text{ dan } k = 2m + 6; \end{cases}$

$m = 1,2,3, \ldots$

Bukti.

Graf $Amal(C_4, e, k)$ memiliki titik $V\left(amal\big(C_4^i, e, k\big)\right) = \{p_1, p_2\} \cup \{x_{i,1},\ x_{i,2} \mid 1 \leq i \leq k\}$ dengan sisi pusat $e = p_1p_2$. Berdasarkan Teorema 3.1, pembuktian $pd(Amal(C_4, e, k)$ akan dibagi ke dalam tiga kasus yaitu untuk $k = 4,5,6$, $k = 2m + 5$, dan $k = 2m + 6$.

Untuk $k = 4,5,6$, telah dibuktikan dan diperoleh $pd(Amal(C_4, e, k) = 4$.

Untuk $k = 2m + 5$, akan dibuktikan $pd(Amal(C_4, e, k) = 3 + m$. Pada batas atas dari dimensi partisinya pilih $\prod = \{S_1,\ S_2, S_3, .., S_{3+m}\}$ dengan $S_1 = \left\{p_1, x_{i,1}, x_{2,2} \mid 1 \leq i \leq \frac{k+1}{2}\right\}$,

$S_2 = \left\{p_2, x_{\frac{k+1}{2}+1,1}, x_{k,1}, x_{1,2}, x_{k,2}\right\}$,

$S_u = \left\{x_{\frac{k+1}{2}+(u-1)}, x_{u,2}, x_{\frac{k+1}{2}+(u-2),2}\right\}$ untuk $3 \leq u \leq 2 + m$, dan

$S_{3+m} = \left\{x_{\frac{k+1}{2},2}, x_{k-1,2}\right\}$.

Representasi setiap titik terhadap $\prod$ adalah

$$r(p_1|\prod) = \left(0, \underbrace{1, \dots, 1}_{m+1}, 2\right),$$

$$r(p_2|\prod) = \left(1{,}0, \underbrace{1, \dots, 1}_{m+1}\right),$$

$$r(x_{1,1}|\prod) = \left(0{,}1, \underbrace{2, \dots, 2}_{m}, 3\right),$$

$$r(x_{1,2}|\prod) = \left(1{,}0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m+1}\right),$$

$$r(x_{2,1}|\prod) = \left(0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m+1}, 3\right),$$

$$r(x_{2,2}|\prod) = \left(0{,}1, \underbrace{2, \dots, 2}_{m+1}\right),$$

$$r(x_{i,1}|\prod) = \left(0, \underbrace{2, \dots, 2}_{i-2}, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-i+2}, 3\right); 3 \le i \le \frac{k+1}{2},$$

$$r(x_{i,1}|\prod) = \left(1{,}2{,}0, \underbrace{3, \dots, 3}_{i-\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}, 1, \underbrace{3, \dots, 3}_{m-i+\frac{k+1}{2}}\right); \frac{k+1}{2} + 1 \le i \le k-1,$$

$$r(x_{i,2}|\prod) = \left(1{,}1, \underbrace{2, \dots, 2}_{i-2}, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-(i-2)}\right); 3 \le i \le \frac{k+1}{2},$$

$$r(x_{i,2}|\prod) = \left(2{,}1{,}1, \underbrace{2, \dots, 2}_{i-\left(\frac{k+1}{2}+1\right)}, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m-1-\left(i-\left(\frac{k+1}{2}+1\right)\right)}\right); \frac{k+1}{2} + 1 \le i \le k-1,$$

$$r(x_{k,1}|\prod) = \left(1{,}0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m}, 3\right),$$

$$r(x_{k,2}|\prod) = \left(2{,}0, \underbrace{2, \dots, 2}_{m+1}\right).$$

Dapat dilihat bahwa setiap titik yang berada pada kelas partisi yang sama memiliki representasi berbeda terhadap $\prod = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{3+m}\}$ maka $\prod$ adalah partisi pembeda. Oleh karena itu, batas atas dari dimensi partisi $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k = 2m + 5$ adalah $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) \leq 3 + m$.

Selanjutnya akan ditentukan batas bawah dari dimensi partisi $Amal(C_4, e, k)$, mengambil partisi pembeda $\prod_1$ dengan kardinalitas lebih kecil dari $3 + m$ diperoleh :

1. Terdapat titik-titik yang setara (**merujuk ke Lemma 3.1**) pada S_1 yaitu $x_{i,1}$ dengan $1 \leq i \leq \frac{2m+6}{2}$ dan tetangga dari $x_{1,1}$ berada di S_2, tetangga dari $x_{3,1}$ berada di $S_3, \dots$, tetangga dari $x_{\frac{2m+6}{2},1}$ berada di S_{3+m} akibatnya tidak terdapat titik setara pada S_1 yang tetangganya berada pada kelas partisi yang sama. Selanjutnya, apabila titik-titik pada S_2 atau S_3 atau ... atau S_{3+m} didistribusikan sembarang maka terdapat dua titik berada pada kelas partisi yang sama dan dua titik tersebut merupakan tetanggga dari dua titik setara yaitu $x_{1,1}$ atau $x_{3,1}$atau ... atau $x_{\frac{2m+6}{2},1}$ yang berada pada S_1 sehingga kedua titik setara itu memiliki representasi yang sama terhadap himpunan partisi. Berdasarkan **Akibat 3.1**, hal tersebut tidak boleh terjadi. Akibatnya himpunan partisi yang memuat 2+m kelas partisi bukan merupakan partisi pembeda.
2. Apabila titik-titik pada S_1 didistribusikan sembarang maka terdapat dua kasus berikut.

   Kasus 1. p_1 berada di kelas yang sama dengan p_2 sehingga terdapat beberapa subkasus berikut.

   - Setiap kelas partisi terdapat $x_{1,1}$ atau $x_{2,1}$ atau ... atau $x_{\frac{k+1}{2},1}$ sehingga mengakibatkan $r(p_1|\prod_1) = r(p_2|\prod_1)$.
   - Terdapat dua atau lebih titik setara berada pada kelas yang sama dan tetangga dari titik setara tersebut juga berada pada kelas yang sama.

   Kasus 2. p_1 berada di kelas yang berbeda dengan p_2 sehingga terdapat beberapa subkasus berikut.

   - Terdapat titik setingkat yang berada pada kelas partisi yang sama namun tetangga dari titik setingkat tersebut juga berada pada kelas partisi yang sama.
   - Terdapat dua titik setara dan tetangga dari dua titik setara tersebut juga berada pada kelas partisi yang sama. Akibatnya dua titik setara tersebut memiliki representasi yang sama.

Dapat dilihat bahwa untuk setiap kelas partisi selalu terdapat representasi titik yang sama terhadap $\prod_1$. Sehingga, partisi pembeda $\prod_1$ kardinalitas lebih kecil dari $3 + m$ bukan himpunan pembeda dari $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k = 2m + 5$. Oleh karena itu, batas bawah dari dimensi partisi $Amal(C_4, e, k)$ dengan $k = 2m + 5$ adalah $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) \geq 3 + m$.

Jadi, untuk $k = 2m + 5$ diperoleh $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 3 + m$.

Untuk $k = 2m + 6$, akan dibuktikan dengan cara yang sama pada saat menunjukkan untuk $k = 2m + 5$ diperoleh $pd(Amal(C_4, e, k) = 3 + m$. Sehingga diperoleh, jika $k = 2m + 6$ maka $pd(Amal(C_4, e, k) = 3 + m$.

Selanjutnya, karena $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 4$ untuk $k = 4{,}5{,}6$, $pd(Amal(C_4, e, k) = 3 + m$ untuk $k = 2m + 5$ dan $k = 2m + 6$ maka **Teorema 3.1** telah terbukti benar.

4. KESIMPULAN

Dari hasil yang diperoleh, didapatkan kesimpulan bahwa dimensi partisi dari graf $Amal(C_4, e, k)$ terbagi menjadi dua yaitu $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 4$ untuk $k = 4{,}5{,}6$, $pd\big(Amal(C_4, e, k)\big) = 3 + m$ untuk $k = 2m + 5$ dan $k = 2m + 6$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Chartrand, G., Salehi, E., & Zhang, P., 2000. The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Mathematica*, 59, 45-54.

[2] Faisal., Mardiana, N., & Rosiyanti, H., 2019. Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Comb Graf Lingkaran dan Graf Lintasan. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, Vol. 5, No 2, 163-174.

[3] Hasmawati., 2015. Bahan Ajar Teori Graf. Universitas Hasanuddin, Makassar.

[4] Hasmawati., Hinding, N., Nurwahyu, B., Daming, A. S., & Amir, A. K., 2022. The Partition Dimension of The Vertex Amalgamation of Some Cycles. *Heliyon*, Vol. 8, Issue 6.

[5] Indriyani, RA. N., 2013. Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi pada Graf Amalgamasi Sisi Siklus Gasal. Universitas Airlangga, Surabaya.

[6] Liza, G. A., 2018. Dimensi Partisi dari Graf Persahabatan. *Jurnal Matematika UNAND*, Vol. 7, No. 3, 54-58.

[7] Monica, Mohan. C., Santhakumar, S., 2019. Partition Dimension of Rooted Product Graphs. *Elseiver*, Vol. 262, No. 12, 138-147.

[8] Wei, C., Nadeem, M. F., Siddiqui, H. M. A., Azeem, M., Liu, J., & Khalil, A., 2021. On Partition Dimension of Some Cycle-Related Graphs. *Hindawi,* Vol. 2021, No. 4, 1-8.